

الإتصال

تمرين 1

نعتبر الدالة : $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 6}{-2x^2 + 5x - 2}$

1- حدد النهايات عند محددات f

2- ادرس إتصال f على D_f

3- هل الدالة f تقبل تمديدا بإتصال في : 2 ; $\frac{1}{2}$ ؟

الحل

1- $D_f =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; 2[\cup]2; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{1}{3}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$

$f(x) = \frac{2x - 3}{-2x + 1} \quad x \neq 2$

x	$1/2$
$-2x + 1$	$\begin{matrix} + & 0 & - \end{matrix}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

تمرين 2

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} & x \geq \frac{1}{2}; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

بين أن f متصلة في 1 .

الحل

المرافق

تمرين 3

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{x^3+8} & x < -2 \\ f(-2) = \frac{1}{12} \\ f(x) = \frac{1}{x^2-2x+4} & x > -2 \end{cases}$$

بين أن f متصلة في -2 .

الحل

التعميل

تمرين 4

$f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-3}$

بين أن f تقبل تمديدا بإتصال في : 3 ثم عرفه

الحل

$D_f = [2; 3[\cup]3; +\infty[$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-3} \\ &= \frac{(\sqrt{2x+3}-3)-(\sqrt{x+1}-2)}{(\sqrt{x+1}-2)+(\sqrt{x-2}-1)} \\ &= \frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}+3} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}{\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{9}$

إذن : f تقبل تمديدا بإتصال في 3

نعتبر :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & x \in D_f \\ g(3) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

g هي تمديد f بالاتصال في 3

تمرين 5

$n \in \mathbb{N}^* ; f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}$

بين أن f تقبل تمديدا بإتصال في : 0 ثم عرفه

الحل

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^1b^{n-2} + b^{n-1})$

نعتبر : $a = 1+x ; b = 1$

$(1+x)^n - 1 = x((1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \dots + (1+x) + 1)$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (x+1)^k = n$

تمرين 6

$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

حدد : D_f ؛ $f(D_f)$

الحل

$f'(x) = \frac{x(x-4)}{x-2}$

f تناقصية على : $[0; 2[\cup]2; 4]$

f تزايدية على : $]-\infty; 0] \cup]4; +\infty[$

$f(D_f) = f([0; 2[\cup]2; 4]) \cup f(]-\infty; 0] \cup]4; +\infty[)$

$f(D_f) = f([0; 2[\cup]2; 4]) \cup f(]-\infty; 0] \cup]4; +\infty[)$

f متصلة على $[a;b]$ بحيث $f(a) < ab$ و $f(b) > b^2$.
بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]a;b[$ بحيث
 $f(c) = bc$

الحل

نعتبر: $g(x) = f(x) - bx$ بحيث $x \in [a;b]$
بما أن f متصلة على $[a;b]$
فإن g متصلة على $[a;b]$
لدينا: $g(a) = f(a) - ab$ و $f(a) < ab$
إذن: $g(a) < 0$
لدينا: $g(b) = f(b) - b^2$ و $f(b) > b^2$
إذن: $g(b) > 0$
ومنه: $g(a)g(b) < 0$ و **ب**

و من أ و ب: و حسب ميرهنة القيمة الوسطية المعادلة
 $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حل في $[a;b]$

إذن: يوجد عدد حقيقي c من $[a;b]$ بحيث $g(c) = 0$
يعني: يوجد عدد حقيقي c من $[a;b]$ بحيث $f(c) = bc$

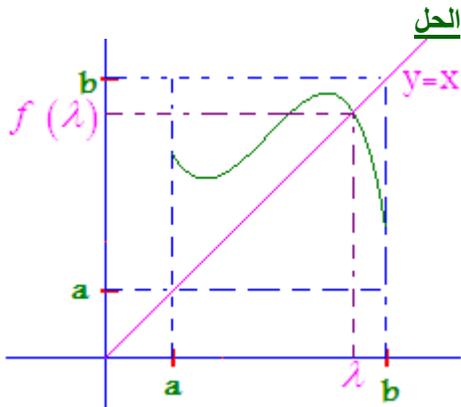
تمرين 10

f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ بحيث:

$$f([a;b]) \subset [a;b]$$

بين أن: $\exists \lambda \in [a;b] / f(\lambda) = \lambda$

(قبل البرهنة ارسم شكلا موضحا ذلك)



إذا كان: $f(a) = a$ أو $f(b) = b$ فالمطلوب تحقق

نفترض أن: $f(a) \neq a$ و $f(b) \neq b$

بما أن: $f([a;b]) \subset [a;b]$

فإن: $a < f(a)$ و $f(b) < b$

نعتبر: $g(x) = f(x) - x$ بحيث $x \in [a;b]$

بما أن: f دالة متصلة على $[a;b]$

فإن: g دالة متصلة على $[a;b]$

$g(a) > 0$ و $g(b) < 0$

$$f(D_f) =]-\infty; 0] \cup [8; +\infty[$$

تمرين 7

f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$

بحيث: $\forall x \in [a;b]: f(x) > g(x)$

بين أن:

$$(\exists \lambda \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in [a;b]): f(x) \geq g(x) + \lambda$$

الحل

نعتبر: $h(x) = f(x) - g(x)$; $x \in [a;b]$

بما أن: f و g دالتان متصلتان على $[a;b]$

فإن: h متصلة على $[a;b]$

إذن: h محدودة على $[a;b]$

ومنه: $(\exists \alpha; \beta \in [a;b]) / h([a;b]) = [h(\alpha); h(\beta)]$

إذن: $(\forall x \in [a;b]): h(x) \geq h(\alpha)$ (1)

بما أن: $\forall x \in [a;b]: f(x) > g(x)$

فإن: $\forall x \in [a;b]: h(x) > 0$

إذن: $h(\alpha) > 0$

نعتبر: $h(\alpha) = \lambda$ إذن: $\lambda \in \mathbb{R}^+$

من: (1)

$$(\exists \lambda \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in [a;b]): h(x) \geq \lambda$$

إذن: $(\exists \lambda \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in [a;b]): f(x) - g(x) \geq \lambda$

ومنه: $(\exists \lambda \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in [a;b]): f(x) \geq g(x) + \lambda$

تمرين 8

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1 - 1$$

بين أن $f(x) = 2$ لها حل وحيد على $[2;3]$

$$f(x) = 2x^3 - 5 - 2$$

بين أن $f(x) = 0$ لها حل على $[-1;3]$

الحل

1- f متصلة تزايدية قطعاً على $[2;3]$

و $2 \in [-1;8]$ و $f([2;3]) = [-1;8]$

إذن: $f(x) = 2$ لها حل وحيد على $[2;3]$

2- f متصلة على $[-1;3]$ و $f(-1) \times f(3) \leq 0$

إذن: حسب ميرهنة القيمة الوسطية $f(x) = 0$ تقبل على

الأقل حل في $[-1;3]$

تمرين 9

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{36x^2 + x} + 6x \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{36x^2 + x - 36x^2}{\sqrt{36x^2 + x} - 6x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{36x^2 + x} - 6x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \left(\sqrt{36 + \frac{1}{x}} + 6 \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\left(\sqrt{36 + \frac{1}{x}} + 6 \right)} \\
&= -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{36x^2 + x} + 6x = -\frac{1}{12}$$

إذن :

$$-2 \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1} \text{ نفس طريقة 1}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{3x+5}}{\sqrt{x+4} - 2} \quad -3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+5 - 3x-5)(\sqrt{x+4} + 2)}{(x+4-2)(\sqrt{x+5} + \sqrt{3x+5})}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(\sqrt{x+4} + 2)}{(x+2)(\sqrt{x+5} + \sqrt{3x+5})}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(\sqrt{x+4} + 2)}{x \left(1 + \frac{2}{x} \right) (\sqrt{x+5} + \sqrt{3x+5})}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(\sqrt{x+4} + 2)}{\left(1 + \frac{2}{x} \right) (\sqrt{x+5} + \sqrt{3x+5})}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(\sqrt{4} + 2)}{(\sqrt{5} + \sqrt{5})}$$

$$A = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{3x+5}}{\sqrt{x+4} - 2} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

إذن :

حسب مبرهنة القيمة الوسيطة $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا على $[a; b]$

إذن : $\exists \lambda \in [a; b] / f(\lambda) = \lambda$

تمرين 11 (التمرين 84 ص 43 المفيد في الرياضيات)
 f دالة عددية متصلة من \mathbb{R} نحو $]-\infty; 1[$

$$0 < a < b$$

g دالة عددية متصلة على \mathbb{R} :

بحيث : $f(a) = a ; g(b) = b ; (\forall x \in \mathbb{R}) g(x) > 1$ ؛

بين أن : $\exists x_0 \in]a; b[/ g(x_0) f(x_0) = x_0$

الحل

$f(a) < 1$: إذن $f(a) \in]-\infty; 1[$

و $g(a) > 1$ لأن $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) > 1$

نعتبر : $h(x) = f(x)g(x) - x$

$h(a) > 0$: إذن $h(a) = a(g(a) - 1)$

$h(b) < 0$: إذن $h(b) = b(f(b) - 1)$

حسب مبرهنة القيمة الوسيطة $h(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا

على $[a; b]$

إذن : $\exists x_0 \in]a; b[/ g(x_0) f(x_0) = x_0$

تمرين 12
احسب :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{36x^2 + x} + 6x \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1} \quad -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{3x+5}}{\sqrt{x+4} - 2} \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3} \quad -4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - x \quad -5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x \quad -6$$

الحل

-1 بما أن x تؤول إلى $-\infty$ نعتبر :

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x \text{ : إذن } x < 0$$

2- بين أن : $\exists \alpha \in \left[\frac{3n}{n+1}; 3 \right] / f(\alpha) = 0$

الحل

1-

أ- $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}; f(x) = x^{n+1} - 3x^n + 2$

$$f(x) = x^{n-1}((n+1)x - 3n)$$

إذن : f تناقصية على $\left[0; \frac{3n}{n+1} \right]$

ب- لدينا : $1 \in \left[0; \frac{3n}{n+1} \right]$ لأن $n > 1$

و بما أن : f تناقصية قطعاً على $\left[0; \frac{3n}{n+1} \right]$

فإن : $f\left(\frac{3n}{n+1}\right) < f(1)$

ولدينا : $f(1) = 0$

إذن : $f\left(\frac{3n}{n+1}\right) < 0$

2- لدينا : $f(3) > 0$ و $f\left(\frac{3n}{n+1}\right) < 0$

حسب مبرهنة القيمة الوسيطة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً

على $\left[\frac{3n}{n+1}; 3 \right]$

إذن : $\exists \alpha \in \left[\frac{3n}{n+1}; 3 \right] / f(\alpha) = 0$

4- المرافق ثم التعميل ب $x - 2$ أو وضع $t = x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})} = \frac{3}{8}$$

5-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x^3} + \sqrt{\frac{1}{x^7}}} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - x = -\infty$$

6- مباشرة $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x = +\infty$

تمرين 13

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1- بين أن : $f(\mathbb{R}) \subset]-1; 1[$

2- احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3- استنتج : $f(\mathbb{R})$

الحل

1- $\forall x \in \mathbb{R}$

$$x^2 < x^2 + 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| < 1$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| < 1$

ومنه : $f(\mathbb{R}) \subset]-1; 1[$

2- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

3- f متصلة و \mathbb{R} مفتوح

إذن : $f(\mathbb{R})$ مفتوح

بما أن : f فردية و $|f(x)| < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

فإن : $f(\mathbb{R}) =]-\alpha; \alpha[$ حيث : $\exists \alpha \in]0; 1[$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) < \alpha$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \alpha$ إذن : $1 \leq \alpha$

إذن : $\alpha = 1$

ومنه : $f(\mathbb{R}) =]-1; 1[$

تمرين 14

$n \in \mathbb{N}^* - \{1\}; f(x) = x^{n+1} - 3x^n + 2$

1- أ- بين أن : f تناقصية على $\left[0; \frac{3n}{n+1} \right]$

ب- استنتج أن : $f\left(\frac{3n}{n+1}\right) < 0$