المرجح

نسمي نقطة متزنة كل زوج (A,α) حيث A نقطة من المستوى و α عدد حقيقي.

I) مرجح نقطتين.

1) **تعريف** لتكن (A,α) و (B,β) نقطتين متزنتين.
إذا كان $\alpha+\beta\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) أو مرجح النظمة المتزنة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$

2) **خاصية مميزة:**
تكون النقطة G مرجح النظمة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ إذا وفقط إذا كان $\boxed{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)}$ لكل θ من المستوى P.

ملاحظة:
a) إذا أردنا أن نبين أن G مرجح النظمة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ يستحسن استعمال التعريف ونبين أن $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. ولهذا نتبع ما يلي:
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}$ ثم نحسب $\overrightarrow{GA}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ ونعوض.
b) إذا كان G مرجح النظمة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ وأردنا حساب $\overrightarrow{AG}$ أو $\overrightarrow{BG}$ أو $\overrightarrow{CG}$ أو ... يستحسن استعمال الخاصية المميزة.
$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)$ لكل O من P ثم نعوض O ب A أو B أو C ...

3) إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G مرجح $\{(A,k\alpha),(B,k\beta)\}$ لكل k من $\mathbb{R}^*$. وهذا يعني أن المرجح لا يتغير إذا ضربنا الأوزان أو قسمناها على عدد غير منعدم.

4) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\alpha)\}$ مع $(\alpha\neq 0)$ G يسمى مركز ثقل A وB.
لدينا من خلال ما سبق G مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$ إذن $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ لكل θ من P ومن أجل $O=A$ نجد $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ إذن G منتصف $[AB]$

خاصية: مرجح النظمة $\{(A,1)(B,1)\}$ هو مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$ وهو منتصف $[AB]$.

ملاحظة: إذا أردنا أن نبين أن I منتصف $[AB]$ نبين أن I مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$ يعني $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

5) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ لدينا
$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)$ لكل O من P. ومن أجل $O=A$
نجد $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ إذن $G\in(AB)$

ملاحظة: إذا أردنا إنشاء المرجح G نقوم بحساب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{BG}$ بدلالة $\overrightarrow{BA}$.

6) **إحداثيات المرجح:**
ليكن G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ إحداثيات G هي

$$\begin{cases} x_G=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha x_A+\beta x_B\right) \\ y_G=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha y_A+\beta y_B\right)\end{cases}$$

II) مرجح ثلاث نقط.

1) **تعريف:** لتكن (A,α) (B,β) (C,γ) ثلاث نقط متزنة.
إذا كان $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق: $\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$ النقطة G تسمى مرجح النقط (A,α) و (B,β) و (C,γ) أو مرجح النظمة المتزنة $\{(A,\alpha)\ (B,\beta)\ (C,\gamma)\}$.

2) **خاصية مميزة:**
تكون النقطة G مرجح النظمة $\{(A,\alpha)\ (B,\beta)\ (C,\gamma)\}$ إذا وفقط إذا كان: $\boxed{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}\right)}$ لكل O من المستوى P

ملاحظة: نفس ملاحظة I).

3) المرجح لا يتغير إذا ضربنا أو قسمنا الأوزان على نفس عدد غير منعدم.

4) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\alpha)(C,\alpha)\}$ مع $(\alpha\neq 0)$.
لدينا G مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$. المرجح G يسمى في هذه الحالة مركز ثقل النقط A,B,C أو مركز ثقل المثلث (ABC).

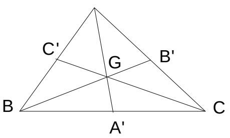
خاصة: مرجح $\{(A,\alpha)(B,\alpha)(C,\alpha)\}$ هو مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$ وهو مركز ثقل (ABC).

5) **إحداثيات المرجح.**
ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\}$ إحداثيات G هي

$$\begin{cases} x_G=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C\right) \\ y_G=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C\right)\end{cases}.$$

6) **التجميعية.**
إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ و G_1 مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G مرجح $\{(G_1,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$ وهذا يعني أن مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع وزني تلك النقطتين.

7) ليكن (ABC) مثلثا مركز ثقله G



G هو مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$
A' وB' وC' منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي المتوسطات (AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في G.
ولدينا $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

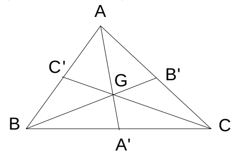
5 **إحداثيات المرجح.**

ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\}$ إحداثيات G هي

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C) \\ y_G = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C) \end{cases}.$$

6 **التجميعية.**

إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ و G_1 مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G مرجح $\{(G_1,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$ وهذا يعني أن مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع وزني تلك النقطتين.



7 ليكن (ABC) مثلثا مركز ثقله G

G هو مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$

A' وB' وC' منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي المتوسطات (AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في G.

ولدينا $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

III) مرجح أربع نقط.

نعرف بنفس الطريقة مرجح أربع نقط وسيكون لدينا نفس الخاصيات السابقة. هناك فرق فقط في التجميعية حيث تصبح:

7 مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع الوزنين أو عوضنا كل نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع الوزنين، أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها متزن بمجموع الأوزان.