2016-2015	فرض رقم 3	

التمرين الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x}$

الجزء (1)

1) أ) أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بين أن المستقيم $y = 2x + 4$ (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $a = 0$ و على يسار النقطة $b = -4$

3) أ) أحسب المشتقة $f'(x)$

ب) بين أن f تزايدية على $]-\infty,-4]$ و تناقصية على المجال $[0,+\infty[$

4) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء (2)

1) أ- بين أن $x \le \sqrt{x^2 + 4x} \le x + 2$ $(\forall x > 0)$

ب- بين أن $\frac{2}{x+2} \ge \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}$ $(\forall x > 0)$

ج- استنتج أن $\frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \le f(x) \le \frac{2}{x}$ $(\forall x > 0)$

2) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{n^2}{k}\right)$

أ- بين أن $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 \le n^3$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- بين أن $1 - \frac{3}{n} \le U_n \le 1 + \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ج- استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \dots\dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$

1) أحسب U_1 ; U_2

2) حدد نهاية المتتالية $(U_n)_{n>0}$

3) أ- عبر عن U_{n+1} بدلالة U_n و بين أن $U_n \le n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- اثبت أن $U_n \le \sqrt{n + 2\sqrt{n-1}}$ $(\forall n > 2)$

ج- أستنتج أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{U_n}{\sqrt{n}} = 1$