

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

(1) أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة

(2) بين ان $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ و أدرس منحنى تغيرات الدالة f

(3) حل في \mathbb{R}^+ المعادلة $f(x) = x$ و المتراجحة $f(x) > x$

(4) بين ان f تقابل من \mathbb{R}^+ نحو I يتم تحديده ثم أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من I

(5) أرسم في نفس المعلم المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$

الجزء الثاني :

لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 \leq U_n < \sqrt{3}$

(2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة ثم حدد نهايتها

(3) نضع $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$ لكل عدد طبيعي n

(أ) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية

(ب) حد الحد العام U_n بدلالة n

الجزء الثالث :

نضع $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k^2$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

(1) (أ) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) n \leq S_n \leq 3n$

(ب) استنتج النهايتين $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(2) نضع $W_n = \frac{S_n}{n}$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

(أ) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) nS_{n+1} - (n+1)S_n = nU_n^2 - S_n$

(ب) استنتج أن المتتالية $(W_n)_n$ تزايدية و أنها متقاربة . نرمل لنهايتها بالعدد l

(3) ليكن n و p عددين من \mathbb{N}^* مع $n > p$

(أ) بين ان $(n-p)U_p^2 \leq S_n \leq nU_{n-1}^2$

(ب) استنتج أن $\frac{n-p}{n}U_p^2 \leq W_n \leq U_{n-1}^2$

(ج) بين أن $(\forall p \in \mathbb{N}^*) U_p^2 \leq l \leq 3$ ثم استنتج قيمة l

التمرين الثاني

ليكن t عددا من \mathbb{R}^+ و n عددا طبيعيا من \mathbb{N}^* .

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x^n - t(1-x)$

(1) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n و أن $0 < a_n < 1$

(2) أ- بين أن $f_{n+1}(a_n) = -t(1-a_n)^2$ و استنتج أن المتتالية $(a_n)_n$ متقاربة

ب- حدد تأطيرا للعدد a نهاية المتتالية $(a_n)_n$

(3) بين بالخلف أن $a = 1$