| | | |
|---|---|---|
| السنة 2 بكالوريا علوم رياضية | الأعداد العقدية- الحساب التكاملي | |

فرض تجريبي مساهمة من أحد أصدقاء موقع رياضيات النجاح - مدة الانجاز ساعتان

**تمرين 1 :**

1) لكل $x$ من $IR$ نضع $I(x)=\int_0^x e^t\cos(2t)\,dt$ ، مستعملا مكاملة بالأجزاء احسب $I(x)$ بدلالة $x$

2) احسب نهاية المتتالية العددية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة كما يلي : $\forall n\in IN^* \quad v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k®}{n}}\cos\left(\frac{2k®}{n}\right)$

**تمرين 2 :**

نعتبر في $C$ المعادلة : $(E):\ z^2+2\left(1-i\sqrt{3}\right)z-4\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$

**الجزء الأول**

1) بين أن مميز المعادلة $(E)$ هو $\Delta=16\,e^{\frac{®}{3}i}$

2) ليكن $z_1$ و $z_2$ حلي $(E)$ حيث $\mathrm{Re}(z_1)>0$

3) حدد كلا من $z_1$ و $z_2$ على الشكل الجبري

4) بين أن : $z_1^2=4\left(-\sqrt{3}+i\right)$ و أن : $z_2=i\,z_1$

5) اكتب $z_1^2$ على الشكل المثلثي

6) استنتج أن : $z_1=\left[2\sqrt{2}\,;\frac{5®}{12}\right]$ ثم اكتب $z_2$ على الشكل المثلثي

**الجزء الثاني**

في المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ نعتبر النقطتين $A$ و $B$ ذات اللحقين $z_1$ و $z_2$ على التوالي و نعتبر $R$ الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{®}{2}$، $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران $R$

1) بين أن $R(A)=B$

2) أ) بين أن : $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv\frac{®}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)[2®]$

ب) حدد $(T)$ مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها تكون $M$ و $B$ و $M'$ مستقيمية.

**تمرين 3 :**

**الجزء الأول**

نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $IR^*$ بما يلي : $g(x)=1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

1) ادرس تغيرات $g$ على $IR^*$ ثم ضع جدول تغيراتها

2) استنتج أن $g(x)>0 \quad \forall x\in IR^*$

**الجزء الثاني**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $IR$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\ ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) بين أن $f$ متصلة في الصفر

2) بين أن $f$ قابلة للاشتقاق على $IR^*$ و أن : $\forall x\in IR^* \quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

3) استنتج أن $f$ تزايدية قطعا على $IR$

## الجزء الثالث

نعتبر الدالة $F$ المعرفة على $[1;+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_1^{x^2} f(t)dt$

1) بين أن لكل $x$ من $]1;+\infty[$ : $\left(\exists c_x \in ]1;x^2[\right)\ f(c_x)=\frac{1}{x^2-1}F(x)$

2) استنتج أن لكل $x$ من $]1;+\infty[$ : $(x^2-1)f(1)\leq F(x)\leq (x^2-1)f(x^2)$

3) استنتج أن $F$ قابلة للاشتقاق يمين 1

4) بين أن $F$ قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و حدد $F'$

## الجزء الرابع

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{f(t)}{t^3}dt$

1) بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا

2) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير بين أن : $\forall n\in IN^*\ \ u_n=\int_1^n\left(1-\frac{e^u}{1+e^u}\right)du$

3) استنتج $u_n$ بدلالة $n$ ثم احسب نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$

| | الأعداد العقدية۔ الحساب التكاملي<br>حلول مقترحة | السنة 2 بكالوريا علوم رياضية |
|---|---|---|

فرض تجريبي مساهمة من أحد أصدقاء موقع رياضيات النجاح ـ مدة الانجاز ساعتان

**تمرين 1 :**

1

$$I(x)=\int_0^x e^t\cos(2t)\,dt=\int_0^x\left(e^t\right)'\cos(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\cos(2t)\right)'\,dt$$
$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x e^t\sin(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x\left(e^t\right)'\sin(2t)\,dt$$
$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\left(\left[e^t\sin(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\sin(2t)\right)'\,dt\right)$$
$$I(x)=\left[e^t\cos(2t)+2e^t\sin(2t)\right]_0^x-2\left(2\int_0^x e^t\cos(2x)\,dt\right)=\left[e^t\left(\cos(2t)+2\sin(2t)\right)\right]_0^x-4\,I(x)$$

$$I(x)=\int_0^x e^t\cos(2t)\,dt=\int_0^x\left(e^t\right)'\cos(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\cos(2t)\right)'\,dt$$
$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x e^t\sin(2t)\,dt=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\int_0^x\left(e^t\right)'\sin(2t)\,dt$$
$$=\left[e^t\cos(2t)\right]_0^x+2\left(\left[e^t\sin(2t)\right]_0^x-\int_0^x e^t\left(\sin(2t)\right)'\,dt\right)$$

بالتالي :

$$I(x)=\frac{1}{5}\left[e^t\left(\cos(2t)+2\sin(2t)\right)\right]_0^x=\frac{\left(\cos(2x)+2\sin(2x)\right)e^x-1}{5}$$

2

على المجال $[0;®]$ الدالة $g:x\to e^x\cos(2x)$ قابلة للاشتقاق على $IR$

و لدينا : $\forall x\in IR\ g'(x)=e^x\left(\cos(2x)-2\sin(2x)\right)$ ، ولكون الدالة $g'$ متصلة على $[0;®]$ فهي محدودة

عليه، بالتالي :

$$v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k®}{n}}\cos\left(\frac{2k®}{n}\right)=\frac{1}{®}\,\frac{®}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k®}{n}}\cos\left(\frac{2k®}{n}\right)=\frac{1}{®}\,\frac{®-0}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(0+k\frac{®-0}{n}\right)$$
$$v_n=\frac{1}{®}\int_0^{®}g(t)dt=\frac{I(®)}{®}=\frac{e^{®}-1}{5®}$$

**تمرين 2 :**

$$(E):\ z^2+2\left(1-i\sqrt{3}\right)z-4\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$$

## الجزء الأول

1 لدينا :

$$\Delta=4\left(1-i\sqrt{3}\right)^2+16\left(1+i\sqrt{3}\right)=4\left(1-2i\sqrt{3}-3+4+4i\sqrt{3}\right)=4\left(2+2i\sqrt{3}\right)=16\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16\,e^{\frac{®}{3}i}$$

2

أحد الجذرين المربعين لـ $\Delta$ هو : $¢=4\,e^{\frac{®}{6}i}=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

منه :

$$z_1=\frac{-2\left(1-i\sqrt{3}\right)+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{2}=-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}+i=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$$

و :

$$z_2=\frac{-2\left(1-i\sqrt{3}\right)-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{2}=-1+i\sqrt{3}-\sqrt{3}-i=-\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}-1\right)i$$

3

لدينا :

$$z_1^2=\left(\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right)^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)i-\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$
$$z_1^2=4-2\sqrt{3}+4i-\left(4+2\sqrt{3}\right)=-4\sqrt{3}+4i=4\left(-\sqrt{3}+i\right)$$

و:

$$i\,z_1=i\left(\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right)=i\left(\sqrt{3}-1\right)-\left(\sqrt{3}+1\right)=z_2$$

4

$$z_1^2=4\left(-\sqrt{3}+i\right)=8\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\left[8,\frac{5®}{6}\right]$$

5

بما أن : $z_1^2=\left[8,\frac{5\pi}{6}\right]$ فإن : $z_1=\left[\sqrt{8},\frac{5\pi}{12}\right]$ أو $z_1=\left[\sqrt{8},\frac{5\pi}{12}+\pi\right]$

أي : $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]$ أو $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{17\pi}{12}\right]$

ولكن وبما أن $\mathrm{Re}(z_1)>0$ و $\mathrm{Re}\left(\left[2\sqrt{2},\frac{17\pi}{12}\right]\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)<0$ فإن : $z_1=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]$

منه : $z_2=\boldsymbol{i}\,z_1=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]=\left[1\times2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{11\pi}{12}\right]$

## الجزء الثاني

$A(z_1)$ و $B(z_2)$ ، $R$ الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران $R$

1

الكتابة العقدية للدوران $R$ هي $z'=\boldsymbol{i}\,z$

بما أن : $z_2=\boldsymbol{i}\,z_1$ فإن : $B=R(A)$

2

أ)

لدينا لكل $z\neq z_2$ و $z\neq z_1$ : $z'=\boldsymbol{i}\,z$ و $z_2=\boldsymbol{i}\,z_1$ منه : $\frac{z'-z_2}{z-z_2}=\frac{\boldsymbol{i}\,z-\boldsymbol{i}\,z_1}{z-z_2}=\boldsymbol{i}\,\frac{z-z_1}{z-z_2}$

منه : $\arg\left(\frac{z'-z_2}{z-z_2}\right)\equiv\arg(\boldsymbol{i})+\arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)[2\pi]$ أي : $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)[2\pi]$

ب)

إذا كانت $M=B$ أو $M=A$ فالنقط $M$ و $B$ و $M'$ مستقيمية.

إذا كانت $M\neq B$ أو $M\neq A$ فإن :

$$M\in(T)\iff\left(\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv0[2\pi]\ ou\ \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)\equiv\pi\,[2\pi]\right)$$

$$M\in(T)\iff\left(\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv0[2\pi]\ ou\ \frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\pi\,[2\pi]\right)$$

$$M\in(T)\iff\left(\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]\ ou\ \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$$

$$M\in(T)\iff(BM)\perp(AM)$$

خلاصة : $(T)$ هي الدائرة ذات القطر $[AB]$

تمرين 3 :

## الجزء الأول

$$\forall x\in IR^*\qquad g(x)=1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

1

الدالة $g$ متصلة و قابلة للاشتقاق على $IR^*$ ، ولدينا :

$$\forall x\in IR^*\ g'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}+1\right)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\frac{2x+1}{-x}\right)$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | | - | 0 | + | \|\| | + | |
| $-x$ | | + | | + | 0 | - | |
| $g'(x)$ | | - | 0 | + | \|\| | - | |
| $g(x)$ | | ↘ | $\frac{e^2-1}{e^2}$ | ↗ | \|\| | ↘ | |

ليس مطلوبا إدراج النهايات في المحدات في جدول التغيرات ما دام لم يرد حسابها في أي سؤال سابق.

2 لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1+1=2$ بما أن الدالة $g$ تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$ فإن : $\forall x\in]0;+\infty[\ g(x)>2$

ولدينا : $\forall x\in ]-\infty;0[\quad g(x)>\frac{e^2-1}{e^2}$ ، بالتالي: $\forall x\in IR^*\quad g(x)>0$

## الجزء الثاني

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\ ; x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$$

1 لدينا : $\left(\frac{0+}{+\infty}\right)$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$ و $\left(\frac{0+}{1+0}\right)$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$

بالتالي : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0=f(0)$ ، ما يعني أن $f$ متصلة في الصفر

2 بما أن الدوال : $x\mapsto x$ و $x\mapsto 1+e^{\frac{1}{x}}$ قابلة للاشتقاق على $IR^*$ وحيث أن : $\forall x\in IR^*\ 1+e^{\frac{1}{x}}\neq 0$

فإن $f$ قابلة للاشتقاق على $IR^*$ و لدينا :

$$\forall x\in IR^*\quad f'(x)=\left(\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)'=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}-x\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

3 سبق و برهنا أن $\forall x\in IR^*\quad g(x)>0$ منه : $\forall x\in IR^*\quad f'(x)>0$ ولكون : $f'(0)=0$

فإن : $\forall x\in IR\quad f'(x)\geq 0$ و $x=0\ \Leftrightarrow\ f'(x)=0$ (أي أن المشتقة تنعدم في عدد معدود من الحلول)

بالتالي $f$ تزايدية قطعا على $IR$

## الجزء الثالث

$$\forall x\in[1;+\infty[\quad F(x)=\int_1^{x^2} f(t)dt$$

1 ليكن $x\in]1;+\infty[$ ، بما أن الدالة $t\mapsto f(t)$ متصلة على $[1;x^2]$

فإن : $(\exists c_x\in]1;x^2[)\ f(c_x)=\frac{1}{x^2-1}\int_1^{x^2} f(t)dt$ أي : $(\exists c_x\in]1;x^2[)\ f(c_x)=\frac{1}{x^2-1}F(x)$

بالتالي : $(\forall x>1)\quad(\exists c_x\in]1;x^2[)\ f(c_x)=\frac{1}{x^2-1}F(x)$

2 ليكن $x\in]1;+\infty[$ إذن : $(\exists c_x\in]1;x^2[)\ f(c_x)=\frac{1}{x^2-1}F(x)$

بما أن $f$ تزايدية قطعا على $IR$ فإن :

$$1<c_x<x^2\ \Rightarrow\ f(1)<f(c_x)<f(x^2)\ \Rightarrow\ f(1)<\frac{1}{x^2-1}F(x)<f(x^2)\ \Rightarrow\ (x^2-1)f(1)\leq F(x)\leq (x^2-1)f(x^2)$$

بالنسبة لـ $x=1$ المتفاوتة صحيحة

بالتالي: لكل $x$ من $[1;+\infty[$ : $(x^2-1)f(1)\leq F(x)\leq (x^2-1)f(x^2)$

3 لدينا : $(x+1)f(1)\leq\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\leq (x+1)f(x^2)$ $\quad\forall x>1$ $\quad(F(1)=0)$

وبما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x+1)f(1)=2f(1)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x+1)f(x^2)=2f(1)$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=2f(1)$

بالتالي $F$ قابلة للاشتقاق يمين 1 ولدينا : $F'_d(1)=2f(1)=\frac{2}{1+e}$

4 بما أن $t\mapsto f(t)$ متصلة على $[1;x^2]$ فإن $F(x)$ معرفة لكل $x\geq 1$ و قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$

وبوضع : $\forall x\in[1;+\infty[\quad U(x)=\int_1^x f(t)dt$ فإن : $\forall x\in[1;+\infty[\quad F(x)=U(x^2)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | منه : $\forall x \in ]1;+\infty[ \quad F'(x) = 2xU'(x^2) = 2x\,f(x^2) = \dfrac{2x^3}{1+e^{\frac{1}{x^2}}}$ | | |
| | **الجزء الرابع**<br>$\forall n \in IN^* \quad u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \dfrac{f(t)}{t^3}dt$ | | |
| 1 | لدينا : $\forall n \in IN^*\ u_{n+1} - u_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \dfrac{f(t)}{t^3}dt - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \dfrac{f(t)}{t^3}dt = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} \dfrac{f(t)}{t^3}dt + \int_{1}^{\frac{1}{n}} \dfrac{f(t)}{t^3}dt = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \dfrac{f(t)}{t^3}dt$<br>وبما أن الدالة $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t^3}$ موجبة قطعا على $\left[\dfrac{1}{n+1};\dfrac{1}{n}\right]$ فإن : $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \dfrac{f(t)}{t^3}dt > 0$<br>بالتالي $(u_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا | | |
| 2 | نضع : $u = \dfrac{1}{t}$ منه : $t = \dfrac{1}{u}$ منه : $dt = \dfrac{-1}{u^2}du$ و $\begin{cases} t = \dfrac{1}{n} \Rightarrow u = n \\ t = 1 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$<br>منه : $u_n = \int_n^1 \dfrac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u^3}}\left(\dfrac{-1}{u^2}\right)du = -\int_n^1 u\,f\left(\dfrac{1}{u}\right)du = -\int_n^1 u\dfrac{\frac{1}{u}}{1+e^u}du = \int_n^1 \dfrac{-1}{1+e^u}du = \int_n^1 \dfrac{-1-e^u+e^u}{1+e^u}du$<br>$u_n = \int_n^1 \left(-1+\dfrac{e^u}{1+e^u}\right)du = \int_1^n \left(1-\dfrac{e^u}{1+e^u}\right)du$ | | |
| 3 | $u_n = \int_1^n \left(1-\dfrac{e^u}{1+e^u}\right)du = \left[u - \ln(1+e^u)\right]_1^n = n - \ln(1+e^n) - 1 + \ln(2) = \ln(2) - 1 - \ln\left(\dfrac{1+e^n}{e^n}\right)$<br>بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2) - 1 - \ln(1) = \ln(2) - 1$ | | |