السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الاشتقاق / دراسة الدوال / المتتاليات	فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\left]-1\,;+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)-\frac{x}{x^2+2x+2}$

أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)$

1) احسب $g'(x)$ لكل $x\in\left]-1\,;+\infty\right[$ ثم ضع جدول تغيرات g

2) استنتج إشارة g على $x\in\left]-1\,;+\infty\right[$

II) أ) بين أن : $\forall x\in[0;+\infty[\quad 0\le x-\operatorname{Arctan}x\le\frac{1}{3}x^3$

ب) استنتج حساب النهاية : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x-\operatorname{Arctan}x}{x^2}$

III) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\frac{-2}{\text{®}}x^2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)+2 & ;x>-1\\ f(x)=-\sqrt[3]{-x^3-x^2}+1 & ;x\le-1\end{cases}$$

وليكن (Cf) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

1) بين أن $Df=IR$

2) بين أن f متصلة على IR

3) بين أن f قابلة للاشتقاق يمين -1 و أن : $f'_d(-1)=2+\frac{2}{\text{®}}$ (استعمل الخاصية : $\forall t>0\ \operatorname{Artctan}\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\text{®}}{2}-\operatorname{Artctan}(t)$)

4) أدرس قابلية اشتقاق f يسار -1 و أول النتيجة المحصل عليها هندسيا.

5) بين أن (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $(\Delta_1):\ y=\frac{-2}{\text{®}}x+\frac{2}{\text{®}}+2$ جوار $+\infty$ (يمكنك وضع : $t=\frac{1}{x+1}$)

6) بين أن (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $(\Delta_2):\ y=x+\frac{4}{3}$ جوار $-\infty$

7) تحقق أن : $\forall x\in\left]-1;+\infty\right[\ \ f'(x)=\frac{-2x}{\text{®}}g(x)$ و $\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\ \ f'(x)=\frac{x(3x+2)}{3\left(\sqrt[3]{-x^3-x^2}\right)^2}$

8) أوجد جدول تغيرات الدالة f

9) أنشئ (Cf) (نقبل أن (Cf) يقطع محور الأفاصيل في نقطتين أفصولاهما ≈ 4 ~ و $\approx -1{,}5$)

تمرين 2 : لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $(\forall n\in IN)\quad u_{n+1}=1+\frac{1}{u_n}$

1) بين أن : $(\forall n\in IN)\quad u_n\ge1$

2) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفين بما يلي : $v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$ لكل $n\in IN$

أ) بين بالترجع أن (v_n) تزايدية و أن (w_n) تناقصية.

ب) بين أن : $(\forall n\in IN)\quad |v_{n+1}-w_{n+1}|\le\frac{1}{4}|v_n-w_n|$

ج) بين أن (v_n) و (w_n) متحاذيتان

د) استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها.

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الاشتقاق / دراسة الدوال / المتتاليات	فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

$$\forall x\in\left]-1\,;+\infty\right[\quad g(x)=2\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)-\frac{x}{x^2+2x+2}$$

(I

1

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)=2\times\frac{®}{2}-\frac{-1}{1}=®+1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=2\times0-0=0$$

2

لدينا لكل : $\forall x\in\left]-1\,;+\infty\right[$

$$g(x)'=2\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}-\frac{x^2+2x+2-x(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}=2\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}-\frac{x^2+2x+2-2x^2-2x}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$g(x)'=\frac{-2}{(x+1)^2+1}-\frac{2-x^2}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{-2(x^2+2x+2)-2+x^2}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$g(x)'=\frac{-2x^2-4x-4-2+x^2}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{-(x^2+4x+6)}{(x^2+2x+2)^2}<0$$

(لأن : $\Delta=16-24<0$)

منه:

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$®+1$ $\searrow$ 0

3

حسب جدول التغيرات نستنتج أن : $g(x)>0$ $\forall x\in\left]-1\,;+\infty\right[$ (لأن : $g(\left]-1;+\infty\right[)=\left]0,®+1\right[$)

(II

1

نعتبر الدالتين : $p(x)=x-\text{Arctan}\,x$ و $q(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\text{Arctan}\,x$

الدالتان قابلتان للشتقاق على IR .

و لدينا : $\forall x\in IR\quad p(x)=1-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}\geq0$ و

$$\forall x\in IR\quad q(x)=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^4-1+1}{x^2+1}=\frac{x^4}{x^2+1}\geq0$$

إذن فهما تزايديتان منه : $\begin{cases}p(x)\geq0\\q(x)\geq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p(x)\geq p(0)\\q(x)\geq q(0)\end{cases}\Leftarrow x\geq0$ منه : $\begin{cases}\forall x\in[0;+\infty[& p(x)\geq0\\ \forall x\in[0;+\infty[& q(x)\geq0\end{cases}$

و هذا يعني : $\forall x\in[0;+\infty[\quad 0\leq x-\text{Arctan}\,x\leq\frac{1}{3}x^3$

مبرهنة التزايدات المنتهية غير مفيدة في هذه الحالة بسبب عدم نجاعة التأطير بعد حساب المشتقة.

2

بما أن : $\forall x>0\quad 0\leq\frac{x-\text{Arctan}\,x}{x^2}\leq\frac{1}{3}x$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}0=0$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{3}x=0$ فإن : $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x-\text{Arctan}\,x}{x^2}=0$

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-2}{®}x^2\ \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+2 & ; x>-1 \\ f(x)=-\sqrt[3]{-x^3-x^2}+1 & ; x\leq -1 \end{cases}$		
لدينا : $Df=\{x\in\left]-1;+\infty\right[/ x+1\neq 0\}\cup\{x\in\left]-\infty;-1\right] / -x^3-x^2\geq 0\}$ $Df=\left]-1;+\infty\right[\cup\{x\in\left]-\infty;-1\right] / -x^2(x+1)\geq 0\}$ $Df=\left]-1;+\infty\right[\cup\{x\in\left]-\infty;-1\right] / (x+1)\leq 0\}$ $Df=\left]-1;+\infty\right[\cup\left]-\infty;-1\right]$ $Df=IR$	1	
لدينا الدالة $h: x\mapsto \dfrac{1}{x+1}$ متصلة على $\left]-1;+\infty\right[$ و $h(\left]-1;+\infty\right[)\subset IR$ و الدالة $x\mapsto \text{Arctan}(x)$ متصلة على IR إذن الدالة $x\mapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ متصلة على $\left]-1;+\infty\right[$ ، و لدينا أيضا الدالة $x\mapsto \dfrac{-2}{®}x^2$ متصلة على $\left]-1;+\infty\right[$ إذن f متصلة على $\left]-1;+\infty\right[$ و لدينا الدالة الحدودية $s: x\mapsto -x^3-x^2$ متصلة على IR و $s(\left]-\infty;-1\right])\subset\left[0;+\infty\right[$ و الدالة $x\mapsto -\sqrt[3]{x}$ متصلة على $\left[0;+\infty\right[$ إذن $x\mapsto -\sqrt[3]{x^3-x^2}$ متصلة على $\left]-\infty;-1\right]$ ، إذن: f متصلة على $\left]-\infty;-1\right]$ من جهة أخرى لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{-2}{®}x^2\ \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+2=\dfrac{-2}{®}\times 1\times\dfrac{®}{2}+2=-1+2=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} -\sqrt[3]{-x^3-x^2}+1=1$ منه : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=f(-1)$ بالتالي f متصلة على IR	2	III
لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{\frac{-2}{®}x^2\ \text{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)+1}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{\frac{-2}{®}x^2\left(\frac{®}{2}-\text{Arctan}(x+1)\right)+1}{x+1}$ $=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{-x^2+\frac{2}{®}\text{Arctan}(x+1)+1}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{1-x^2}{x+1}+\dfrac{\frac{2}{®}\text{Arctan}(x+1)}{x+1}$ $=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} 1-x+\dfrac{2}{®}\dfrac{\text{Arctan}(x+1)}{x+1}=1-(-1)+\dfrac{2}{®}\times 1=2+\dfrac{2}{®}$ بالتالي f قابلة للاشتقاق يمين -1 و لدينا : $f'_d(-1)=2+\dfrac{2}{®}$	3	
$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{-\sqrt[3]{-x^3-x^2}}{x+1}=\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \dfrac{-\sqrt[3]{t^3-t^2}}{-t+1}=\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \dfrac{\sqrt[3]{t^2(t-1)}}{t-1}=\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \sqrt[3]{\dfrac{t^2}{(t-1)^2}}=+\infty$ إذن f غير قابلة للاشتقاق يسار -1 ، لكن (Cf) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة ذات الأفصول -1 .	4	
وضعنا $t=-x$ تفاديا لأخطاء الإشارة داخل الجذر مكعب.		

5

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)+\frac{2}{\text{®}}x-\frac{2}{\text{®}}-2=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\text{®}}x^2\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)+2+\frac{2}{\text{®}}x-\frac{2}{\text{®}}-2$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\text{®}}x\left(-x\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)+1\right)-\frac{2}{\text{®}}$$

لدينا :

$$=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\frac{2}{\text{®}}\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)\text{Arctan}(t)+1\right)-\frac{2}{\text{®}}$$

$$=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\frac{2}{\text{®}}\left(\frac{1-t}{t}\right)\left(\text{Arctan}(t)+\frac{t-\text{Arctan}(t)}{t}\right)-\frac{2}{\text{®}}$$

$$=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\frac{2}{\text{®}}(1-t)\left(\frac{\text{Arctan}(t)}{t}+\frac{t-\text{Arctan}(t)}{t^2}\right)-\frac{2}{\text{®}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)+\frac{2}{\text{®}}x-\frac{2}{\text{®}}-2=\frac{2}{\text{®}}\times(1-0)(1+0)-\frac{2}{\text{®}}=0$$

بالتالي : (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=\frac{-2}{\text{®}}x+\frac{2}{\text{®}}+2$: (Δ_1) جوار $+\infty$

6

$$\lim_{x\to-\infty}-\sqrt[3]{-x^3-x^2}+1-x-\frac{4}{3}=\lim_{t\to+\infty}-\sqrt[3]{t^3-t^2}+t-\frac{1}{3}=\lim_{t\to+\infty}t-\sqrt[3]{t^3-t^2}-\frac{1}{3}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3-\left(t^3-t^2\right)}{t^2+t\sqrt[3]{t^3-t^2}+\left(\sqrt[3]{t^3-t^2}\right)^2}-\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}-\sqrt[3]{-x^3-x^2}+1-x-\frac{4}{3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{t^2\left[1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{t}}+\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{t}}\right)^2\right]}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

إذن : (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=x+\frac{4}{3}$: (Δ_2) جوار $-\infty$

7

$$f'(x)=\frac{-2}{\text{®}}\left(2x\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)+x^2\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}\right)$$

لدينا لكل $x>-1$:

$$f'(x)=\frac{-2}{\text{®}}\left(2x\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)+x^2\frac{-1}{1+(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{\text{®}}\left(2\,\text{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)-\frac{x}{1+(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{\text{®}}\,g(x)$$

و لكل $x<-1$:

$$f'(x)=\left(-\left(-x^3-x^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{-1}{3}\left(-x^3-x^2\right)^{\frac{1}{3}-1}\times\left(-x^3-x^2\right)'=\frac{x(3x+2)}{3\left(\sqrt[3]{-x^3-x^2}\right)^2}$$

8

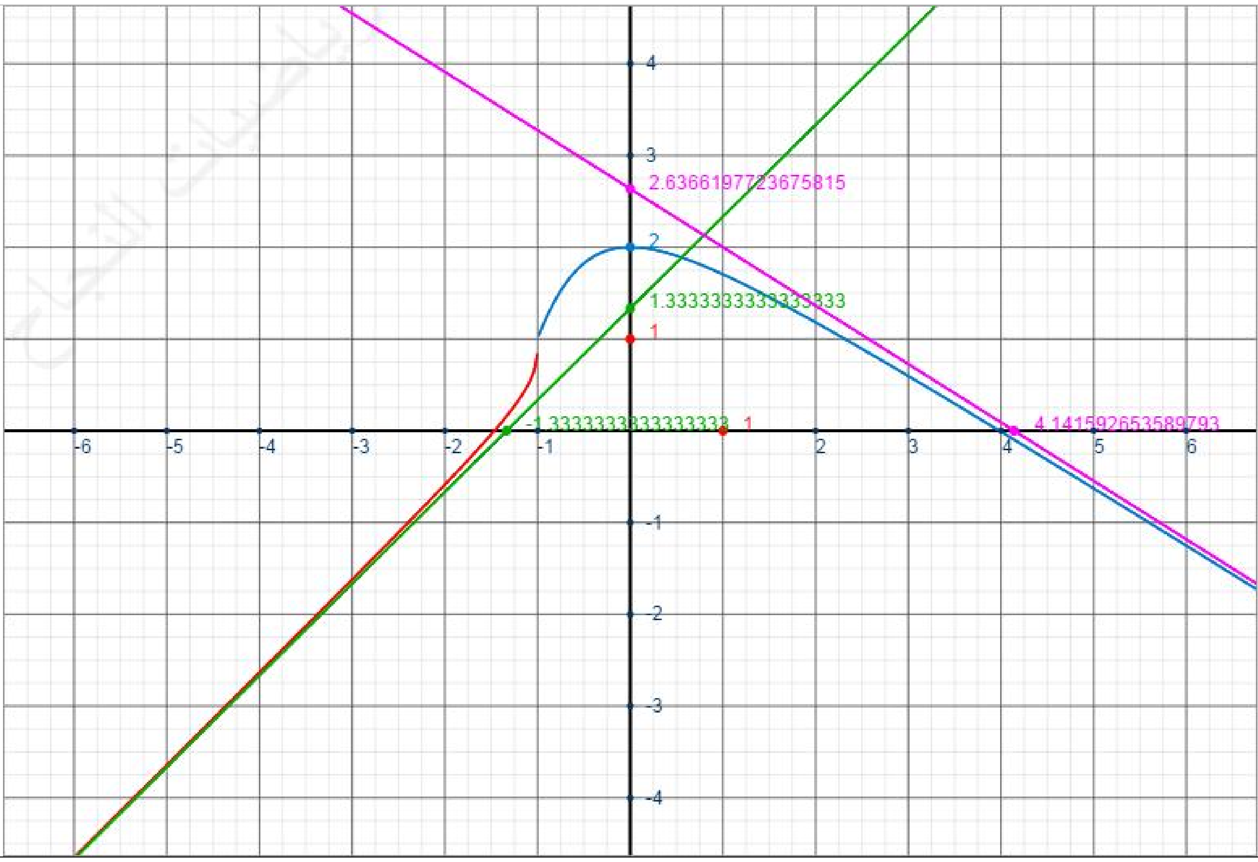
بما أن : $g(x)>0$ $\quad \forall x>-1$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة x على $]-1;+\infty[$

ولدينا : $x<-1 \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ 3x+2<-1<0 \end{cases} \Rightarrow x(3x+2)>0 \Rightarrow g(x)>0$

منه:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

9



تمرين 2 : $u_0=1$ و $u_{n+1}=1+\dfrac{1}{u_n}$ $\quad (\forall n\in IN)$

1

بالنسبة لـ $n=0$ لدينا $u_0\geq 1$

نفترض أن $u_n\geq 1$ و نبين أن : $u_{n+1}\geq 1$

لدينا : $u_n\geq 1 \Rightarrow u_{n+1}-1=\dfrac{1}{u_n}>0 \Rightarrow u_{n+1}\geq 1$ ، بالتالي بالنسبة بين أن : $u_n\geq 1 \quad (\forall n\in IN)$

$v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$

2 أ)

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ و الدالة : $g(x)=f\circ f(x)=2-\dfrac{1}{x+1}$

لدينا : $w_n=u_{2n+1}=f(u_{2n})=f(v_n)$ و $v_{n+1}=u_{2n+2}=f(u_{2n+1})=f(w_n)$

منه : $w_{n+1}=f(v_{n+1})=f(f(w_n))=g(w_n)$ و $v_{n+1}=f(w_n)=f(f(v_n))=g(v_n)$

من جهة أخرى لدينا : $\forall (x,y)\in]0;+\infty[\ x>y \Rightarrow x+1>y+1 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{y+1} \Rightarrow \dfrac{-1}{x+1}>\dfrac{-1}{y+1} \Rightarrow g(x)<g(y)$

إذن g تزايدية على $]0;+\infty[$

الآن لدينا : $v_0=u_0=1$ و $w_0=u_1=2$ و $v_1=u_2=\frac{3}{2}$ و $w_1=u_3=\frac{5}{3}$ منه : $v_1>v_0$ و $w_1<w_0$

نفترض أن $v_{n+1}>v_n$ و $w_{n+1}<w_n$

إذن ولكون g تزايدية على $]0;+\infty[$ فإن : $g(v_{n+1})>g(v_n)$ و $g(w_{n+1})<g(w_n)$

منه : $v_{n+2}>v_{n+1}$ و $w_{n+2}<w_{n+1}$

بالتالي : $\forall n\in IN \quad v_{n+2}>v_{n+1}$ و $\forall n\in IN \quad w_{n+2}<w_{n+1}$

أي أن (v_n) تزايدية وأن (w_n) تناقصية.

ب) لدينا : $v_{n+1}-w_{n+1}=\left(2-\frac{1}{1+v_n}\right)-\left(2-\frac{1}{1+w_n}\right)=\frac{1}{1+w_n}-\frac{1}{1+v_n}=\frac{v_n-w_n}{(1+v_n)(1+w_n)}$

منه : $\left|\frac{v_{n+1}-w_{n+1}}{v_n-w_n}\right|=\frac{1}{(1+v_n)(1+w_n)}$ ولكون : $u_n\ge 1\ (\forall n\in IN)$ فإن : $\begin{cases}v_n\ge 1\\ w_n\ge 1\end{cases}\ (\forall n\in IN)$

منه : $\frac{1}{(1+v_n)(1+w_n)}\le\frac{1}{4}$ بالتالي : $|v_{n+1}-w_{n+1}|\le\frac{1}{4}|v_n-w_n|\ (\forall n\in IN)$

يمكن أيضا استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، لكن سهولة الحساب تجعل هذه الطريقة أفضل.

ج) باستعمال س ب) وبتعويض n بقيم متتابعة وبضرب المتفاوتات المحصل عليها طرفا بطرف وبعد الاختزال نجد : $|v_n-w_n|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n|v_0-w_0|\ (\forall n\in IN)$ منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-w_n)=0$

ولكون (v_n) و (w_n) إحداهما تزايدية والأخرى تناقصية فهما متحاذيتان

د) بما أن (v_n) و (w_n) متحاذيتان فهما متقاربتان و لهما نفس النهاية ℓ، إذن (u_n) متقاربة نهايتها ℓ

ولكون : $u_{n+1}=f(u_n)$ و f متصلة على $[1;+\infty[$ و $f([1;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ فإن : $f(\ell)=\ell$

هذه المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الآخر هو العدد الذهبي : $\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

الاستنتاج هنا اعتمد على الخاصية : إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1}=\ell$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ و التي نبرهن عنها باستعمال التعريف. (انظر الكتاب المدرسي ت ص 72 س5)