فرض محروس رقم 2

التمرين الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}x-2+\frac{4}{\sqrt{x}+1}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$ أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

3) أ- بين أنّ $f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+3\sqrt{x}+4\right)}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$ $\left(\forall x\in \left]0,+\infty\right[\right)$

ب- أدرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها

التمرين الثاني

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} U_0=\frac{1}{2} \\ U_{n+1}=\frac{3U_n}{1+2U_n} \end{cases}$

-1 بين أنّ $0<U_n<1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

(لاحظ أنّ $U_{n+1}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2U_n+1}\right)$)

-2 أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

-3 نضع $V_n=1-\frac{1}{U_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أنّ $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و أحسب V_0

ب- استنتج أنّ $U_n=\frac{3^n}{3^n+1}$ و أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

فرض محروس رقم 2

التمرين الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}x-2+\frac{4}{\sqrt{x}+1}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$ أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

3) أ- بين أنّ $f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+3\sqrt{x}+4\right)}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$ $\left(\forall x\in \left]0,+\infty\right[\right)$

ب- أدرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها

التمرين الثاني

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} U_0=\frac{1}{2} \\ U_{n+1}=\frac{3U_n}{1+2U_n} \end{cases}$

-1 بين أنّ $0<U_n<1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

(لاحظ أنّ $U_{n+1}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2U_n+1}\right)$)

-2 أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

-3 نضع $V_n=1-\frac{1}{U_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أنّ $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و أحسب V_0

ب- استنتج أنّ $U_n=\frac{3^n}{3^n+1}$ و أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

تصحيح الفرض رقم 02

التمرين الأول:

① تحديد D_f:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 0 \ , \ \sqrt{x}+1 \neq 0\}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+$$

$$D_f = [0 ; +\infty[.$$

* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

② قابلية الاشتقاق على يمين 0.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x - 2 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x - 4 + \frac{4}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} - \frac{4}{x} + \frac{4}{x(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} - 4\frac{\sqrt{x} \cancel{+1} \cancel{-1}}{\sqrt{x}\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = 0^+ \qquad \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) > 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = -\infty$

إذن

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = -\infty$$

وعليه فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 . إذن C_f يقبل نصف مماس راسي موجه نحو الأسفل.

③ . المشتقة $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)' - 2' + \left(\frac{4}{\sqrt{x}+1}\right)'$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4'(\sqrt{x}+1) - 4(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\frac{-4}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2 - 4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+1) - 4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} + 2x + \sqrt{x} - 4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(x+1) - (x+1) + 3(x-1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(x+1)(\sqrt{x}-1) + 3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+1+3(\sqrt{x}+1))}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+3\sqrt{x}+4)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

— من إنجاز التلميذة

صالحة جبوج —

* جدول التغيرات :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x}-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\sqrt{x}-1$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$	↗ $+\infty$

التمرين الثاني:

① نبين أن $0<u_n<1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

من أجل $n=0$: $0<u_0=\frac{1}{2}<1$ (v)

نفترض أن $0<u_n<1$

ونبين أن $0<u_{n+1}<1$

لدينا $u_{n+1}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2u_n+1}\right)$

و

$$0<u_n<1 \Rightarrow 1<2u_n+1<3$$
$$\Rightarrow -1<\frac{-1}{2u_n+1}<-\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow 0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow 0<\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2u_n+1}\right)<1$$
$$\Rightarrow 0<u_{n+1}<1$$

وعليه $0<u_n<1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

② رتابة u_n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+1}$$

$0<1-u_n<1$ و $2u_n+1>0$

$$0<2u_n(1-u_n)<2$$

إذن $u_{n+1}>u_n$

وعليه u_n متتالية تزايدية.

③ نبين أن v_n هندسية :

$$v_{n+1}=1-\frac{1}{u_{n+1}} \iff v_{n+1}=1-\frac{1+2u_n}{3u_n}$$
$$=\frac{u_n-1}{3u_n}$$
$$=\frac{u_n}{3u_n}-\frac{1}{3u_n}$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3u_n}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{u_n}\right)$$
$$=\frac{1}{3}v_n$$

وعليه v_n متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

$$v_0=1-\frac{1}{u_0}$$
$$=-1$$

ب) $v_n=1-\frac{1}{u_n} \iff v_n-1=-\frac{1}{u_n}$

$$\frac{1}{v_n-1}=-u_n$$
$$u_n=\frac{1}{1-v_n}$$

و

$$v_n=v_0q^n$$
$$=-1\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$u_n=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$
$$u_n=\frac{1}{\frac{3^n+1}{3^n}}$$
$$u_n=\frac{3^n}{3^n+1}$$

نهاية u_n :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{3^n+1}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}$$
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

لأن $-1<\frac{1}{3}<1$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

بإشراف الأستاذ:

الماتني بوشعيب