فرض رقم 1

التمرين الأول :

أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x^3+1}$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x^2-1-2\sqrt{x-1}}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x+1}+2}$ ، $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt[3]{2x}-2}{\sqrt{x}-2}$

التمرين الثاني :

بين أنّ المعادلة $\sqrt{x}=\frac{1}{x-1}$ تقبل على الأقل حلا α في المجال $]1,2[$

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

1) أ- حد مجموعة تعريف الدالة f

ب- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$

2) أ- بين أنّ $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad f'(x)=-\frac{3}{2x\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

ب- استنتج أنّ f تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$

3) بين أنّ f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده

4) أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J

فرض رقم 1

التمرين الأول :

أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x^3+1}$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x^2-1-2\sqrt{x-1}}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x+1}+2}$ ، $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt[3]{2x}-2}{\sqrt{x}-2}$

التمرين الثاني :

بين أنّ المعادلة $\sqrt{x}=\frac{1}{x-1}$ تقبل على الأقل حلا α في المجال $]1,2[$

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

1) أ- حد مجموعة تعريف الدالة f

ب- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$

2) أ- بين أنّ $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad f'(x)=-\frac{3}{2x\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

ب- استنتج أنّ f تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$

3) بين أنّ f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده

4) أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J

تصحيح الفرض رقم 1

التمرين 01 "احسب النهايات التالية"

1) لدينا $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x^3+1}$

ومنه $= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2-x+1)} = -\dfrac{5}{3}$

وعليه $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x^3+1} = -\dfrac{5}{3}$

2) لدينا $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1-2\sqrt{x-1}}{x-1}$

ومنه $= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} - \dfrac{2\sqrt{x-1}}{(x-1)}$

وعليه $= \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) - \dfrac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x-1})}$

نعلم أن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{x-1} = 0^+$

ومنه $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2}{\sqrt{x-1}} = -\infty$

ولدينا أيضا $\lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = 2$

إذن $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1-2\sqrt{x-1}}{(x-1)} = -\infty$

3) لدينا $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}+2}$

ومنه $= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1/\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2/\sqrt{x}\right)}$

بما أن $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x}} = 0$

وكذلك $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

و $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}+2} = +\infty$

4) لدينا $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{2x}-2}{\sqrt{x}-2}$

ومنه $= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x-8}{(\sqrt{x}-2)\left(\sqrt[3]{2x}^2+2\sqrt[3]{2x}+2^3\right)}$

وعليه $= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\left(\sqrt[3]{2x}^2+2\sqrt[3]{2x}+2^3\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt[3]{2x}^2+2\sqrt[3]{2x}+2^3} = \dfrac{1}{2}$

إذن $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{2x}-8}{\sqrt{x}-2} = \dfrac{1}{2}$

التمرين 02

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1,2[$ بمايلي: $f(x) = \sqrt{x}(x-1)-1$

• لدينا $x \to x-1$ متصلة على $]1,2[$

و $x \to \sqrt{x}$ متصلة على $]1,2[$

إذن f دالة متصلة على $]1,2[$ لأنها جداء دالتين متصلتين

• ولدينا $f(1) = -1$

و $f(2) = -1+\sqrt{2}$

إذن $f(1)\times f(2) < 0$

وحسب مبرهنة القيم الوسطية يوجد على الأقل عنصر α من المجال $]1,2[$ بحيث

$$f(\alpha) = 0$$

أي $\sqrt{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}$

من إنجاز التلميذة:

فاطمة الزهراء جدي.

التمرين 03

لدينا $f(x) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

1) أ. لنحدد D_f

$D_f = \{x\in\mathbb{R} / \sqrt{x} \neq 0 , x \geq 0\}$

أي $D_f = \{x\in\mathbb{R} / x>0\}$

$D_f =]0,+\infty[$

ب لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = 1$

لنحسب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

لدينا $\lim\limits_{x\to0^+} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

بما أن $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0^+$

فإنه $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

وعليه $\lim\limits_{x\to0^+} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = +\infty$

2) أ- لنثبت أن

$(\forall x\in]0,+\infty[) ; f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

لدينا $f'(x) = \left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\right)'$

$f'(x) = 3\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$

$f'(x) = 3\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right)$

إذن $f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

ب: لدينا $f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	1

إذن f تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$

3) لنثبت أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على J

لدينا f دالة متصلة وتناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ إذن f تقبل دالة عكسية معرفة على J بحيث

$J = f]+\infty,0[=]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to0} f(x)[$

$=]1,+\infty[$

4) لنحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J

$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

$\iff \left(1+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^3 = x$

$\iff 1+\frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x}$

$\iff \frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x}-1$

$\iff \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$

$\iff y = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)^2$

إذن $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)^2$ لكل x من $]1,+\infty[$