مبادئ في المنطق

العبارة

العبارة هي كل نص رياضي صحيح لغويا و معناه يمكن أن يكون صحيحا أو خاطئا و لا يمكن أن يكون صحيحا و خاطئا في نفس الوقت

الدالة العبارية

هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة و يصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة

المكممات

المكمم الكوني

لتكن $P(x)\quad ;x\in E$

العبارة $(\forall x\in E):\quad P(x)$ تقرأ مهما يكن x من E لدينا $P(x)$ أو تقرأ لكل x من E لدينا $P(x)$ و هي تعني أن جميع عناصر المجموعة E تحقق $P(x)$

الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني

المكمم الوجودي

لتكن $P(x)\quad ;x\in E$

- العبارة $(\exists x\in E):\quad P(x)$ تعني يوجد عنصر x على الأقل من E يحقق $P(x)$

الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي

- العبارة $(\exists! x\in E):\quad P(x)$ تعني يوجد عنصر وحيد x من E يحقق $P(x)$

الرمز $\exists!$ يسمى المكمم الوجودي بالوحدانية

إذا كانت المكممات من نفس الطبيعة فترتيبها غير مهم أما إذا كانت من طبيعتين مختلفتين فترتيبها مهم

العمليات المنطقية

نفي عبارة

نفي عبارة P هي عبارة نرمز لها ب $\overline{P}$ أو $nonP$
$\overline{P}$ تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت P صحيحة

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

نفي عبارات مكممة

- نفي العبارة : $(\forall x \in E): \quad P(x)$ هي العبارة : $(\exists x \in E): \quad \overline{P(x)}$
- نفي العبارة : $(\exists x \in E): \quad P(x)$ هي العبارة : $(\forall x \in E): \quad \overline{P(x)}$
- نفي العبارة : $(\forall x \in E)(\forall y \in F): \quad P(x,y)$ هي العبارة : $(\exists x \in E)(\exists y \in F): \quad \overline{P(x,y)}$
- نفي العبارة : $(\forall x \in E)(\exists y \in F): \quad P(x,y)$ هي العبارة : $(\exists x \in E)(\forall y \in F): \quad \overline{P(x,y)}$

الإستدلال بالمثال المضاد:

- ✓ للبرهنة على أن عبارة ما P خاطئة يكفي أن نبرهن أن نفيها $\overline{P}$ صحيح
- ✓ للبرهنة على أن العبارة $(\forall x \in E): \quad P(x)$ خاطئة يكفي إيجاد على الأقل عنصر x من E بحيث تكون $\overline{P(x)}$ صحيحة

الفصل المنطقي

نرمز لفصل عبارتين P و Q بالرمز : (P أو Q) أو $(P \vee Q)$ و هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين P و Q صحيحة.

P	Q	$(P \vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

العطف المنطقي

نرمز لعطف عبارتين P و Q بالرمز : (P و Q) أو $(P \wedge Q)$ و هو عبارة تكون صحيحة فقط في حالة إذا كانت العبارتين P و Q صحيحتين معا .

P	Q	$(P \wedge Q)$
1	1	1

1	0	0
0	1	0
0	0	0

الإستلزام

نرمز لإستلزام عبارتين P و Q بالرمز : $P \Rightarrow Q$ و نقرأ P تستلزم Q أو إذا كان P فإن Q و هو يكون خاطئا في حالة واحدة هي أن تكون P صحيحة و Q خاطئة

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

التكافؤ المنطقي

نرمز لتكافؤ عبارتين P و Q بالرمز : $P \Leftrightarrow Q$
و نقرأ (P تكافئ Q) أو (P تعني Q) أو (P إذا وفقط إذا كان Q)
و هو يعني ($P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$)
ويكون التكافؤ صحيحا إذا كانت ل P و Q نفس قيم الحقيقية

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

القوانين المنطقية

قوانين مورغان

لتكن P و Q عبارتين ، لدينا :

$$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q} \qquad \overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$$

لتكن P و Q و R ثلاث عبارات ، لدينا :

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

قانون التكافؤات المتتالية

العبارة $\left[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)\right] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ قانون منطقي

قانون الإستلزام المضاد للعكس

العبارة $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ قانون منطقي

قانون الخلف

العبارة $\left[(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}) \wedge (\overline{P} \Rightarrow Q)\right] \Rightarrow P$ قانون منطقي

قانون فصل الحالات

العبارة $\left[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\right] \Rightarrow \left[(P \vee Q) \Rightarrow R\right]$ قانون منطقي

مبدأ الترجع

لتكن $P(n)$ خاصية لمتغير صحيحي طبيعي n

- إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث تكون $P(n_0)$ صحيحة
- إذا كانت العبارة $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $(\forall n \geq n_0)$ صحيحة

فإن العبارة $P(n)$ $(\forall n \geq n_0)$ صحيحة