مبادئ في المنطق

I- تعاريف ومصطلحات

1- العبارة – الدالة العبارية

أ- العبارة

نشاط

ضع العلامة $\times$ في الخانة المناسبة

	نص رياضي	صحيح	خاطئ	لا يمكن الحكم على صحتها أو خطئها بدون نقاش
p	$-8\times -4=-32$			
q	مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي			
r	كل عدد فردي هو عدد أولي			
s	$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$			
t	الدالة $x\to x^2$ حيث $x\in\mathbb{R}$ دالة زوجية			
$p(x;y)$	x و y عنصران من $\mathbb{R}$ /$x\le y$.			
$p(x)$	$(x\in\mathbb{R}):x^2-x\ge 0$			

أ- تعريف

نسمي عبارة كل جملة خبرية تحمل معنى و يكون صحيحا أو خاطئا و لا يمكن أن يكون صحيحا و خاطئا في نفس الوقت.نرمز للعبارة بأحد الرموز p أو q أو r......................

أمثلة النصوص p و q و r و s و t عبارات

النصان $p(x;y)$ و $p(x)$ ليس بعبارتين

ب-الدالة عبارية

في النشاط السابق

* اذا عوضنا x و y بعددين معلومين في التعبير x و y عنصران من $\mathbb{R}$ /$x\le y$ نحصل على عبارة.

مثلا من أجل $y=-6$ $x=1$ نحصل على $1\le -6$ عبارة خاطئة

من أجل $y=4$ $x=1$ نحصل على $1\le 4$ عبارة صحيحة

لذا نقول التعبير "x و y عنصران من $\mathbb{R}$ /$x\le y$" دالة عبارية

* التعبير "$(x\in\mathbb{R}):x^2-x\ge 0$" دالة عبارية لأن إذا عوضنا x بأي قيمة من $\mathbb{R}$ نحصل على عبارة

مثلا من أجل $x=2$ $2^2-2\ge 0$ عبارة صحيحة

من أجل $x=\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\ge 0$ عبارة خاطئة

تعريف

كل نص رياضي يحتوي على متغير أو (متغيرات) ينتمي(أو تنتمي) إلى مجموعة معينة و يصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة يسمى دالة عبارية

2- المكممات – العبارات المكممة

أ- المكمم الوجودي

لتكن $p(x)$; $x\in E$ دالة عبارية

العبارة $(\exists x\in E):\ p(x)$ تعني يوجد على الأقل عنصرا x من E يحقق $p(x)$.

الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي .

إذا كان يوجد عنصرا وحيدا x من E يحقق $p(x)$ فإننا نكتب $(\exists! x\in E):\ p(x)$

ب- المكمم الكوني

لتكن $p(x)$; $x \in E$ دالة عبارية

العبارة $(\forall x \in E): \ p(x)$ تعني أن جميع عناصر E تحقق $p(x)$. تقرأ لكل x من E , $p(x)$ محقق (أو صحيحة).

الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني.

أمثلة

ضع العلامة $\times$ في الخانة المناسبة

العبارة	خاطئة	صحيحة
$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = -1$	$\times$	
$\exists x \in \mathbb{Z} \quad \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$		$\times$
$\exists! x \in [0;\pi] \quad \cos x = \frac{1}{2}$		$\times$
$\exists! x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4$	$\times$	
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$		$\times$
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad x - y = 1$	$\times$	

د- العبارات المكممة

لتكن $p(x;y)$ دالة عبارية معرفة على $E \times F$

نطبق أحد المكممين على الخاصية $p(x;y)$ بالنسبة للمتغير x

مثلا المكمم الكوني، نحصل على $(\forall x \in E): \ p(x;y)$

دالة عبارية للمتغير y وهي غير مرتبطة بـ x.

نطبق عليها أحد المكممين بالنسبة للمتغير y. مثلا المكمم الوجودي،

فنحصل على العبارة $p(x;y) \ (\forall x \in E) \ (\exists y \in F)$.

أمثلة

$y^2 = x \ (\exists y \in \mathbb{R}) \ (\forall x \in \mathbb{R})$ عبارة خاطئة (نأخذ $x = -1$)

$x + y = -2 \ (\exists y \in \mathbb{R}) \ (\forall x \in \mathbb{R})$ عبارة صحيحة

$x + y = -2 \ (\forall x \in \mathbb{R}) \ (\exists y \in \mathbb{R})$ عبارة خاطئة

$|x+y| \leq |x| + |y| \ (\forall y \in \mathbb{R}) \ (\forall x \in \mathbb{R})$ عبارة صحيحة.

$x + y = 3 \ (\exists y \in \mathbb{R}) \ (\exists x \in \mathbb{R})$ عبارة صحيحة.

ملاحظة هامة

ترتيب مكممات من نفس الطبيعة ليس له أهمية في تحديد المعنى التي تحمله العبارة المكممة.
ترتيب مكممات من طبيعة مختلفة له أهمية في تحديد المعنى التي تحمله العبارة المكممة .

II- العمليات المنطقية

1- نفي عبارة

نشاط: في حوار جرى بين فاطمة و أحمد , أساسه أن كل ما قالته فاطمة ينفيه أحمد و كل ما قاله أحمد تنفيه فاطمة , أنقل الجدول التالي إلى دفترك ثم أملئه :

ما قالته فاطمة	ما قاله أحمد	حكمك على قول فاطمة	حكمك على قول أحمد
$\sqrt{2} \in IN$			
	$\sqrt{7} + \sqrt{2} \prec 5$		
49عددأولي			
	$\sqrt{(-2)^2} = -2$		

أ- تعريف

نفي عبارة p هي عبارة نرمز لهابـ $\overline{p}$ أو بـ $\neg p$ تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة. $\overline{p}$ تقرأ نفي p

في جدول الحقيقة: Tableau de vérité

إذا كانت العبارة صحيحة نرمز لصحتها بالرمز 1 أو V وإذا كانت خاطئة نرمز لعدم صحتهاب 0 أو F

جدول حقيقة $\overline{p}$

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

أمثلة نفي العبارة $1 \prec \sqrt{2}$ هي العبارة $1 \geq \sqrt{2}$

نفي العبارة $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ هي العبارة $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

ب- نفي عبارة مكممة

* نفي العبارة $A(X) \quad \forall x \in E$ هي العبارة $\overline{A(X)} \quad \exists x \in E$.

* نفي العبارة $A(X) \quad \exists x \in E$ هي العبارة $\overline{A(X)} \quad \forall x \in E$.

* نفي العبارة $A(x;y) \quad (\forall y \in F) \quad (\forall x \in E)$ هي العبارة $\overline{A(x;y)} \quad (\exists y \in F) \quad (\exists x \in E)$

نفي العبارة $A(x;y) \quad (\exists y \in F) \quad (\forall x \in E)$ هي العبارة $\overline{A(x;y)} \quad (\forall y \in F) \quad (\exists x \in E)$

مثال اعط نفي العبارة التالية $(\forall z \succ 0) \quad (\exists x \in]0;1[) \quad (\exists y \in]0;1[): \quad x^2 + y^2 \prec z$

د- نتيجة (الاستدلال بالمثال المضاد)

للبرهان على أن عبارة ما p خاطئة ، يكفي أن نبين أن نفيها $\overline{p}$ صحيحة.

للبرهنة على خطأ $\left[(\forall x \in E): \quad A(x)\right]$ يكفي أن نبرهن صحة $\left[(\exists x \in E): \quad \overline{A(x)}\right]$

تطبيق بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^*): \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$ خاطئة

نعتبر $x = -2$ $\quad -2 + \frac{1}{-2} = \frac{-5}{2} \prec 2$ اذن لدينا $(\exists x \in \mathbb{R}^*): \quad x + \frac{1}{x} \prec 2$ عبارة صحيحة

و منه $(\forall x \in \mathbb{R}^*): \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$ خاطئة

2- الفصل المنطقي

تعريف

فصل العبارتين p و q هو العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين p و q صحيحتين . و تكتب (p أو q) نكتبها أيضا $p \vee q$

جدول حقيقة $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

العبارة $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ أو $5 \succ 2$ صحيحة

العبارة $2^2 = -4$ أو $-3 \geq 1$ خاطئة

ملاحظة

* العبارتان (p أو q) و (q أو p) تحملان نفس المعنى نقول عملية الفصل تبادلية

* العبارتان r أو(p أ و q)   و (r أو p) أ و q تحملان نفس المعنى، نقول عملية الفصل تجميعية.

3- العطف المنطقي

تعريف

عطف العبارتين p و q هو العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا. و تكتب(p و q) نكتبها أيضا $p \wedge q$

جدول حقيقة $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

مثال

العبارة $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ و $5 \succ 2$ خاطئة

العبارة $\left(\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0\right)$ و $-3 \prec 1$ صحيحة

ملاحظة

* العبارتان (p و q) و(q و p) تحملان نفس المعنى نقول عملية العطف تبادلية
* العبارتان r و(p و q)   و (r و p) و q تحملان نفس المعنى، نقول عملية العطف تجميعية.

* $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$ بين ذلك

4- الاستلزام

تعريف

استلزام العبارتين p و q هو العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة. و تكتب $p \Rightarrow q$ تقرأ p تستلزم q

جدول حقيقة $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

أمثلة

العبارة $\left(\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0\right) \Rightarrow 4+1=5$ صحيحة

العبارة $2 \succ 1 \Rightarrow -1 = 2+3$ خاطئة

العبارة $3 \times 2 = 9 \Rightarrow 5-1 = 20$ صحيحة

العبارة $\left(\forall \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0\right) \Rightarrow 2-1=1$ صحيحة

اصطلاح   إذا كانت العبارة $p \Rightarrow q$ صحيحة ، نقول إن q استنتاج منطقي للعبارة p.

ملاحظة

* العبارتان $p \Rightarrow q$ و $\left(\overline{p} \vee q\right)$ تحملان نفس المعنى
* $q \Rightarrow p$ يسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $p \Rightarrow q$.
* للبرهنة على أن $p \Rightarrow q$ صحيحة ، يكفي أن نفترض أن p صحيحة و نبين أن q صحيحة.
نقول إن p شرط كاف لتحقيق q

تمرين تطبيقي

ليكن $x \in \mathbb{R}$

بين أن $-2 \le x \le \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-3x+5}{x+4} \le \frac{11}{2}$

(نفترض أن $-2 \le x \le \frac{1}{3}$ و نبين أن $\frac{-3x+5}{x+4} \le \frac{11}{2}$)

5- التكافؤ المنطقي

تعريف

> ليكن p و q عبارتين
> العبارة ($p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$) تسمى تكافؤ العبارتين p و q وتكون صحيحة إذا كانت p و q لهما نفس قيم الحقيقة و نرمز لها بـ $p \Leftrightarrow q$ و تقرأ p تكافئ q أو p إذا وفقط إذا q أو p شرط لازم و كاف لتحقيق q

جدول حقيقة $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

أمثلة العبارة (5 عدد فردي $\Leftrightarrow 3 \succ 2$) صحيحة

العبارة (1- عدد موجب $\Leftrightarrow 5+2=3$) صحيحة

العبارة ($2 \succ 1 \Leftrightarrow -1 \in \mathbb{N}$) خاطئة

ملاحظة

* $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ نقول إن التكافؤ عملية تبادلية

* $(p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r)$ نقول إن التكافؤ عملية تجميعية

تمرين

نقترح عليك برهانين نستعمل فيهما الرمز " $\Leftrightarrow$ " بطريقة مسترسلة . أحد البرهانين خاطئ. و المطلوب منك التعرف عليه مع إعطاء تعليل لجوابك.

1) ليكن x من IR لدينا : $\sqrt{x^2+3} \ge 2 \Leftrightarrow x^2+3 \ge 4$

$$\Leftrightarrow x^2 \ge 1$$

$$\Leftrightarrow x \ge 1$$

2) ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا : $x+\frac{1}{x} \ge 2 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}-2 \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \ge 0$$

تمرين

باستعمال جداول الحقيقة بين أن

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ و $(\bar{p} \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

$\overline{p \Rightarrow \bar{q}} \Leftrightarrow (p \wedge q)$ صحيحة

III- القوانين المنطقية

> كل عبارة مكونة من عبارتين أو عدة عبارات $p;q;r...$مرتبطة بينها بالعمليات المنطقية و تكون صحيحة مهما كانت العبارات $p;q;r...$ تسمى قانونا منطقيا

1- أنشطة

بين أن العبارات التالية قوانين منطقية

$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ ، $p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$ ، $p \vee \overline{p}$

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

ملاحظة و اصطلاح

* لدينا $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ قانون منطقي و يسمى القاعدة العامة للاستدلال الاستنتاجي .

للبرهان على صحة العبارة q

نبين أن الاستلزام $p \Rightarrow q$ صحيحا حيث p عبارة ما صحيحة، ثم نستنتج أن q صحيحة.

* لدينا $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ قانون منطقي نقول إن الاستلزام عملية متعدية.

2- بعض القوانين المنطقية

*أ- قوانين موركان LOIS DE MORGAN

العبارات التالية قوانين منطقية
$\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ $\qquad$ $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

تطبيق حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

الحل

$$(x;y) \in S \Leftrightarrow 2x - y = 2 \wedge (x - y = 0 \vee x + y = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y = 2 \wedge x - y = 0) \\ \vee (2x - y = 2 \wedge x + y = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \wedge y = 2) \vee \left(x = \frac{2}{3} \wedge y = -\frac{2}{3} \right)$$

اذن $S = \left\{ (2;2); \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right) \right\}$

تمرين

اعط نفي العبارات $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x + 1 \geq 0 \quad \vee \quad x^2 - 1 \prec 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (x;y) \in [0;1] \Rightarrow 0 \leq \frac{x+y}{1+xy} \leq 1$$

*ب- قانون التكافؤات المتتالية

العبارة $[(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)] \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ قانون منطقي

نتيجة (الاستدلال بالتكافؤات المتتالية)

نستنتج من هذا القانون أنه اذا كان $(A \Leftrightarrow B)$ و $(B \Leftrightarrow C)$ فان $(A \Leftrightarrow C)$ صحيحا.

تمرين

ليكن $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

بين أن $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow (x;y) = (2;8)$

* د- قانون الاستلزام المضاد للعكس

العبارة $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ قانون منطقي

ملاحظة

في بعض الأحيان يصعب البرهان على صحة $A \Rightarrow B$

فنلجأ الى البرهان على صحة $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ ثم نستنتج صحة $A \Rightarrow B$

هذا البرهان يسمى الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

تمرين ليكن $x \in \mathbb{R}$

بين أن $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$

نتيجة

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B})$ قانون منطقي

*ج- قانون الخلف

$((\overline{B} \Rightarrow \overline{C}) \wedge (\overline{B} \Rightarrow C)) \Rightarrow B$ قانون منطقي

نتيجة (الاستدلال بالخلف)

نفترض أن $\overline{B}$ صحيحة ، ونبين أن $\overline{B} \Rightarrow \overline{C}$ صحيحة(أي $\overline{C}$ صحيحة) حيث Cعبارة ما صحيحة (أي $\overline{B} \Rightarrow C$ صحيحة)
و هذا تناقض لأن C لا يمكن أن تكون صحيحة و خاطئة في نفس الوقت .ثم نستنتج أن B صحيحة.

هذا نوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بالخلف.

تمرين برهن أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

* ر- قانون فصل الحالات

$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow C]$ قانون منطقي

ملاحظة

إذا كانت $A \vee B$ صحيحة فانه للبرهنة على صحة C ، نبين أن $A \Rightarrow C$ صحيحة و $B \Rightarrow C$ صحيحة ،
ثم نستنتج أن C صحيحة.

هذا الاستدلال يسمى الاستدلال بفصل الحالات

عمليا نطبق $\left[(A \Rightarrow C) \wedge (\overline{A} \Rightarrow C)\right] \Rightarrow C$ لأن $A \vee \overline{A}$ صحيحة دائما.

تمرين حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2 - |x-1| + 1 = 0$

VI- مبدأ الترجـــع

خاصية

لتكن $p(n)$ خاصية لمتغير n صحيح طبيعي إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث تكون العبارة $p(n_0)$ صحيحة . و إذا كانت العبارة $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ $\forall n \geq n_0$ صحيحة. فان العبارة $(\forall n \geq n_0): p(n)$ صحيحة.

ملاحظة

للبرهان على أن $(\forall n \geq n_0): p(n)$ صحيحة، نتبع الخطوات التالية

- التحقق:
  نتحقق أن العبارة $p(n_0)$ صحيحة
- افتراض الترجع:
  نفترض أن العبارة $p(n)$ صحيحة $n \geq n_0$ و نبين أن $p(n+1)$ صحيحة.

هذا الاستدلال يسمى الاستدلال بالترجع

تمرين بين بالترجع $2^n \geq n^2$ $\forall n \geq 4$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$