النهايات والاتصل

I) تذكير:

تمرين 1: احسب:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+(x-1)\sqrt{1-x}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+(x-1)\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}}{x+\sqrt{x^2+1}}\times\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\left(x^2-x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x^2\left(1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$=+\infty$$

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x};x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

ادرس اتصال f في 0.

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{(1-\cos x)}{x^2}\cdot(1+\cos x)\cdot x^2}\cdot\frac{1}{\frac{\sin x}{x}\cdot x}$$

$$=\lim_{x\to0}|x|\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot(1+\cos x)}\cdot\frac{1}{\frac{\sin x}{x}\cdot x}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot(1+\cos x)}.\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1$$

لدينا $\lim_{0^+} f(x)=f(0)$ إذن f متصلة على يمين 0.

$$\lim_{0^-} f(x)=-\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot(1+\cos x)}.\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=-1$$

لدينا $\lim_{0^-} f(x)\neq f(0)$ إذن f غير متصلة على يسار 0.

وبالتالي f غير متصلة في 0.

طريقة أخرى:

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\sin x}=\lim_{0}\frac{|\sin x|}{\sin x}$$

$$\lim_{0^+} f(x)=\lim_{0^+}\frac{\sin x}{\sin x}=1$$

$$\lim_{0^-} f(x)=\lim_{0^-}\frac{-\sin x}{\sin x}=-1$$

تمرين 3: نعتبر الدالة f : $f(x)=\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-2\tan x}{\cos(2x)}$

هل f تقبل تمديدا بالاتصال في $\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim_{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-2\tan x}{\cos(2x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-2\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos(2x)}=\lim_{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{\cos(2x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin(2x)}{\cos^2 x\cos(2x)}=\lim_{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}$$

ولدينا $(1)\lim_{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{\cos^2 x}=2$

لنحسب: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\cos(2x)}$

نضع $t=x-\frac{\pi}{4}$ يعني $x=t+\frac{\pi}{4}$

$$x\to\frac{\pi}{4}\Rightarrow t\to0$$

إذن: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin(2x)}{\cos(2x)}=\lim_{t\to0}\dfrac{1-\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos 2t}{-\sin 2t}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{1-\cos 2t}{(2t)^2}(2t)^2\cdot\frac{-1}{\frac{\sin 2t}{2t}\cdot 2t}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{1-\cos 2t}{(2t)^2}\cdot\frac{-1}{\frac{\sin 2t}{2t}}\cdot 2t=\frac{1}{2}\times-1\times0=0(2)$$

من (1) و (2) لدينا: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=0$

إذن f تقبل تمديدا g بالاتصال في 0 معرف بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=f(x); x\neq 0 \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\end{cases}$$

تمرين 4:

نعتبر الدالة f :

$$\begin{cases} f(x)=x\sin\left(\frac{2}{x}\right), x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$$

1) ادرس اتصال f في 0.

2) احسب $\lim\limits_{+\infty} f(x)$.

1) الاتصال في 0:

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

لدينا: $\forall x\neq 0 -1\le \sin(\frac{2}{x})\le 1$

إذا كان $x\rangle 0$

لدينا $-x\le x\sin\frac{2}{x}\le x$ يعني $-x\le f(x)\le x$

ولدينا $\lim\limits_{0^+} x=\lim\limits_{0^+} -x=0$

إذن $\lim\limits_{0^+} f(x)=0$

إذا كان $x\langle 0$

$x\le x\sin\frac{2}{x}\le -x$ يعني $x\le f(x)\le x$

ولدينا $\lim\limits_{0^-}x=\lim\limits_{0^-}-x=0$

إذا $\lim\limits_{0^-} f(x)=0$

لدينا $\lim\limits_{0^-} f(x)=\lim\limits_{0^+}f(x)=f(0)=0$

إذن f متصلة في 0.

2) حساب $\lim\limits_{+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac2x\right)$$

نضع $t=\frac{2}{x}$ $\quad x\to+\infty \Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)=\lim_{t\to0}\frac{2}{t}\sin t=\lim_{t\to0}2\frac{\sin t}{t}=2$$

II) مركب دالتين:

1) اتصال مركب دالتين:

لتكن f دالة متصلة على مجال I مفتوح و g متصلة على J بحيث $f(I)\subset J$.

لنبين أن gof متصلة على I.

ليكن $x_0\in I$. لنبين أن gof متصلة في x_0

ليكن $\varepsilon\rangle 0$ لنبحث عن $\alpha\rangle0$ بحيث:

$|x-x_0|\langle\alpha \Rightarrow |gof(x)-gof(x_0)|\langle\varepsilon$

لدينا g متصلة في $f(x_0)$ إذن:

بالنسبة لـ $\varepsilon\rangle0$ يوجد $\alpha_1\rangle 0$ بحيث

$|x-f(x_0)|\langle\alpha_1 \Rightarrow |g(x)-g(f(x_0))|\langle\varepsilon \quad (I)$

ولدينا f متصلة في x_0 إذن بالنسبة α_1 يوجد $\alpha_2\rangle0$ بحيث:

$|x-x_0|\langle\alpha_2\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\langle\alpha_1 \ (II)$.

نأخذ $\alpha=\alpha_2$

$|x-x_0|\langle\alpha\Rightarrow|x-x_0|\langle\alpha_2$

لدينا: $(II)\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\langle\alpha_1$

$(I)\Rightarrow |g(f(x))-g(f(x_0))|\langle\varepsilon$

إذن:

$(\forall\varepsilon\rangle0)(\exists\alpha\rangle0): |x-x_0|\langle\alpha\Rightarrow|gof(x)-gof(x_0)|\langle\varepsilon$

إذن gof متصلة في x_0 بالتالي gof متصلة على I.

خاصية:

لتكن f دالة متصلة على مجال I و g دالة متصلة على مجال J بحيث $f(I)\subset J$ الدالة gof متصلة على I

ملاحظة: إذا كانت f متصلة في x_0 و g متصلة في $f(x_0)$ فإن gof متصلة في x_0.

مثال : $f(x)=\cos(\frac{1}{x^2+1})$

نضع $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$ و $h(x)=\cos x$

لدينا $f=goh$

لدينا g متصلة على $\mathbb{R}$ و h متصلة على $\mathbb{R}$ و $g(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$

إذن $f=hog$ متصلة على $\mathbb{R}$.

2) مركب دالة متصلة ودالة تقبل نهاية:

خاصية:

لتكن f دالة معرفة على مجال I منقط مركزه x_0، و g دالة معرفة على J بحيث $f(I)\subset J$.
إذا كانت لـ f نهاية l في x_0 و g متصلة في l فإن $\lim\limits_{x\to x_0} gof(x)=g(l)$.

مثال: نعتبر $f(x)=\cos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}\right)$ لنحسب: $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

لدينا: $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1+x}+1=2$

ولدينا: $x\to\cos x$ متصلة في 2

إذن: $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\cos(2)$

ملاحظة: عمليا لحساب هذه النهاية نتبع ما يلي :

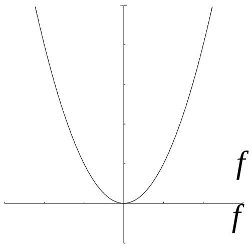
$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\cos\left(\sqrt{1+x}+1\right)=\cos(2)$$

III) صورة مجال بدالة متصلة:

1) أمثلة

مثال1: نعتبر $f(x)=x^2$



لدينا f متصلة على $\mathbb{R}$

ولدينا

$f([0,1])=[0,1]$ $\quad$ $f([-1,1])=[-1,1]$

$f(]0,1[)=]0,1[$ $\quad$ $f(]-1,1[)=[0,1[$

$f(\mathbb{R})=[0,+\infty[$ $\quad$ $f([0,1[)=[0,1[$ $\quad$ $f([-1,1[)=[0,1]$

مثال2: نعتبر الدالة $f(x)=E(x)$

لدينا f غير متصلة على $[0,1]$ لأنها غير متصلة على يسار 1 لأن:

$\lim_{1^+} f(x)=\lim_{1^-} E(x)=\lim_{1^-} 0=0\neq f(1)=1$

إذن f غير متصلة على يسار 1.

ولدينا $f([0;1])=\{0,1\}$.

2) خاصيات:

خاصية مقبولة:

1− صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.

2− صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

3) مبرهنة القيم الوسيطية.

لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$.

نعلم أن صورة قطعة هي قطعة بدالة متصلة

إذن $f([a;b])=[m,M]$

* لكل $y\in[m,M]$ يوجد $x\in[a,b]$ بحيث $f(x)=y$

* ليكن λ عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ لدينا $f(a)$ و $f(b)$ ينتميان إلى $[m,M]$ إذن $\lambda\in[m,M]$ إذن يوجد c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=\lambda$

خاصية: (م.ق.و).

لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$
إذا كان λ عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد $c\in[a,b]$ بحيث $f(c)=\lambda$.

ملاحظة:

لتكن f متصلة على $[a,b]$ بحيث $f([a,b])=[m,M]$ لكل y من $[m,M]$ يوجد على الأقل x من $[a,b]$ بحيث $f(x)=y$.

حالات خاصة:

خاصية(1):

لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$.
إذا كان $f(a).f(b)<0$ (يعني $f(a)$ و $f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان) فإنه يوجد $c\in]a,b[$ بحيث $f(c)=0$.
يعني المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $]a,b[$.

ملاحظة:

إذا كان $f(b).f(a)\leq 0$ فإن $c\in[a,b]$.

خاصية(2):

لتكن f متصلة على $[a,b]$
إذا كانت f رتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a).f(b)<0$ فإنه يوجد عدد وحيد $c\in]a,b[$ بحيث $f(c)=0$.

برهان:

من خلال خاصية (1) نستنتج أنه يوجد $c\in]a,b[$ بحيث $f(c)=0$

لنبين أن c وحيد.

نفترض أنه يوجد c_1 و c_2 مختلفان بحيث $f(c_2)=f(c_1)=0$

لدينا $c_1\neq c_2$ يعني $c_1<c_2$ أو $c_2<c_1$.

وبما أن f رتيبة قطعا (تزايدية مثلا).

فإن: $f(c_1)<f(c_2)$ أو $f(c_1)>f(c_2)$ يعني $0<0$ أو $0>0$ وهذا تناقض.

إذن العدد c وحيد.

تمارين تطبيقية:

تمرين1: بين أن المعادلة $x^3+x^2+x-\sqrt{2}=0$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{R}$.

نضع $f(x)=x^3+x^2+x-\sqrt{2}$ ونعتبر المجال $[0,1]$

لدينا f متصلة على $[0,1]$

لدينا $f(0)=-\sqrt{2}$ و $f(1)=3-\sqrt{2}$

إذن $f(0).f(1)<0$

إذن حسب (م.ق.و) المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $]0,1[$.

وبالتالي المعادلة $x^3+x^2+x-\sqrt{2}=0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$.

تمرين 2: بين أن المعادلة $x^5+x^3+3x-4=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

نضع $f(x)=x^5+x^3+3x-4$ ونعتبر المجال $[0,1]$

* لدينا f متصلة على $[0,1]$ لأنها دالة حدودية .

ولدينا $f'(x)=5x^4+3x^2+3>0$ بما أن $f'>0$ فإن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ وبالتالي على $[0,1]$

$f(0)=-4<0$ و $f(1)=1>0$ إذن $f(0).f(1)<0$.

وحسب (م.و.ق) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $]0,1[$.

* لنبين أن المعادلة ليست لها حل في المجالين: $]-\infty,0[$ و $]1,+\infty[$

ليكن $\alpha\in]1,+\infty[$: لدينا $\alpha>1$

يعني $f(\alpha)>f(1)$

أي $f(\alpha)>1$.

ومنه $f(\alpha)\neq 0$. إذن α ليست حلا للمعادلة $f(x)=0$ ومنه المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلا في $]1,+\infty[$

وبنفس الطريقة نبين أنها لا تقبل حلا في $]-\infty,0[$

وبالتالي $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

تمرين3: لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ بحيث $f([a,b])\subset[a,b]$

بين أن f تقبل نقطة صامدة في $[a,b]$ يعني يوجد c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=c$

نضع $g(x)=f(x)-x$

لدينا g متصلة على $[a,b]$ لأن f متصلة و $x\to x$ متصلة.

لدينا $g(a)=f(a)-a$ ولدينا $f(a)\in[a,b]$

إذن $f(a)\ge a$ إذن $f(a)-a\ge 0$ أي $g(a)\ge 0$

ولدينا $g(b)=f(b)-b$ ولدينا $f(b)\in[a,b]$

إذن $f(b)\le b$ إذن $f(b)-b\le 0$ أي $g(b)\le 0$

ومنه $g(a).g(b)\le 0$.

وحسب (م.ق.و) يوجد c من $[a,b]$ بحيث $g(c)=0$

يعني $f(c)-c=0$

يعني $f(c)=c$

وبالتالي f تقبل نقطة صامدة في $[a,b]$.

IV) الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا.

1) الوجود: Existence

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I

نعلم أن $f(I)$ مجال. نضع $J=f(I)$.

* لنبين أن f تقابل من I نحو J .

لدينا $f(I)=J$ إذن f شمولي.

لنبين أن f تبايني:

لدينا f رتيبة قطعا. نفترض مثلا أن f تزايدية قطعا.

ليكن x و x' من I بحيث $x\ne x'$

$x\ne x' \Rightarrow x<x'$ أو $x>x'$

لدينا $\Rightarrow \begin{cases} f(x)<f(x') \\ f(x)>f(x') \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)\ne f(x')$

إذن: $(\forall(x,x')\in I^2)\ x\ne x' \Rightarrow f(x)\ne f(x')$

ومنه f تبايني.

وبالتالي f تقابل من I نحو J .

خاصية:

إذا كانت:

*) f متصلة على مجال I

*) f رتيبة قطعا على I

*) $f(I)=J$

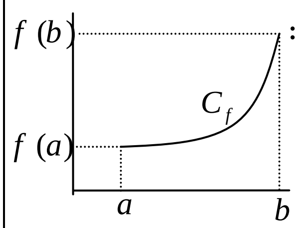
فإن f تقابل من I نحو J

وبالتالي f تقبل دالة عكسية $f^{-1}:J\to I$ ولدينا:

$(\forall x\in J)(\forall y\in I): f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

ملاحظة:

1- إذا كانت f دالة تزايدية ومتصلة فإن :

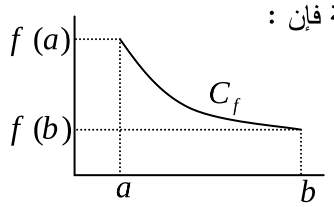


$f([a,b])=[f(a),f(b)]$

$f([a,b[)=[f(a),\lim_{x\to b^-} f(x)[$

$f([a,b[)=[f(a),\lim_{+\infty} f(x)[$

2- إذا كانت f دالة متصلة وتناقصية فإن :



$f([a,b])=[f(b),f(a)]$

$f([a,b[)=]\lim_{b^-} f(x),f(a)]$

$f([a,+\infty[)=]\lim_{+\infty} f;f(a)]$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1: بين أن المعادلة $x^5+x^3+3x-4=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$

نضع $f(x)=x^5+x^3+3x-4$

لدينا f متصلة على $\mathbb{R}$

$(\forall x\in\mathbb{R}): f'(x)=5x^4+3x^2+3>0$

إذن f متصلة على $\mathbb{R}$:

ولدينا: $f(\mathbb{R})=\left]\lim_{-\infty} f;\lim_{+\infty} f\right[$

$=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$

إذن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

ولدينا $0\in\mathbb{R}$ إذن 0 يقبل سابقا وحيدا في $\mathbb{R}$.

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$

تمرين 2: نعتبر الدالة $f:[0,4]\to\mathbb{R}$

$x\to 2x$

1- بين أن f تقابل (دالة عكسية) من $[0,4]$ نحو مجال يجب تحديده.

2- حدد f^{-1}

3- أنشئ C_f و $C_{f^{-1}}$ في نفس المعلم.

1* لدينا f متصلة على $[0,4]$

* لدينا $(\forall x\in[0,4]):\ f'(x)=2>0$

إذن f تزايدية قطعا على $[0,4]$

* لدينا: $f([0,4])=[f(0),f(4)]$

$=[0,8]$

إذن تقابل من $[0,4]$ نحو $[0,8]$.

وبالتالي f^{-1} تقبل من $[0,8]$ إلى $[0,4]$.

2* لنحدد $f^{-1}(x)$

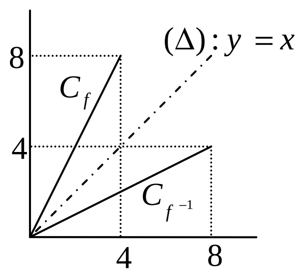
$(\forall x\in[0,8])(\forall y\in[0,4])$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

$\Leftrightarrow 2y=x$

$\Leftrightarrow y=\frac{x}{2}$

إذن $f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$



ملاحظة:

نلاحظ أن f^{-1} متصلة ولها نفس رتابة f ومنحناها هو ماثل منحنى f بالنسبة للمنصف الأول.

2) خاصيات الدالة العكسية:

a) الاتصال:

خاصية: (مقبولة)

لتكن f متصلة ورتيبة قطعا على مجال I

الدالة f^{-1} متصلة على $J=f(I)$

b) الرتابة:

خاصية:

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I

الدالة f^{-1} رتيبة قطعا ولها نفس رتابة f على $f(I)=J$

برهان: $f: I \to J \quad f^{-1}: J \to I$

ليكن y_1 و y_2 من J بحيث $y_2 \neq y_1$

لندرس إشارة $\dfrac{f^{-1}(y_2)-f^{-1}(y_1)}{y_2-y_1}$

نضع $x_1 = f^{-1}(y_1)$ و $x_2 = f^{-1}(y_2)$ يعني $f(x_1)=y_1$ و $f(x_2)=y_2$

مع x_1 و $x_2 \in I$.

لدينا
$$\frac{f^{-1}(y_2)-f^{-1}(y_1)}{y_2-y_1} = \frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

إذن $\dfrac{f^{-1}(y_2)-f^{-1}(y_1)}{y_2-y_1}$ و $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ لهما نفس الإشارة

وبالتالي f و f^{-1} لهما نفس الرتابة.

c) المنحنى:

خاصية:

لتكن f متصلة ورتيبة قطعا على مجال I
C_f و $C_{f^{-1}}$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول.

برهان: لدينا
$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C_f \Leftrightarrow f(x)=y$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$
$$\Leftrightarrow M'\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in C_{f^{-1}}$$

وبما أن M' هي مماثلة M بالنسبة للمنصف الأول فإن $C_{f^{-1}}$ هو مماثل C_f بالنسبة للمنصف الأول.

تمرين تطبيقي:

نعتبر الدالة $f(x)=2x^2+x-1$

1) ادرس تغيرات f و أنشئ C_f

2) ليكن g قصور f على $I=\left[\frac{-1}{4},+\infty\right[$

a) بين أن g تقابل من I نحو مجال يجب تحديده.

b) حدد $g^{-1}(x)$

c) أنشئ $C_{g^{-1}}$

1- تغيرات f:

لدينا: $f'(x)=4x+1$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{4}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$+\infty$ ↘	$\frac{-9}{8}$	↗ $+\infty$

2) a) لدينا g متصلة لأنها قصور دالة متصلة.

ومن خلال جدول تغيرات f لدينا g تزايدية قطعا على I

$$g\left(\left[\frac{-1}{4};+\infty\right[\right)=\left[\frac{-9}{8};+\infty\right[$$

إذن g تقابل من $\left[\frac{-1}{4},+\infty\right[$ نحو $\left[\frac{-9}{8};+\infty\right[$

إذن g تقبل دالة عكسية: $g^{-1}: \left[\frac{-9}{8};+\infty\right[\to \left[\frac{-1}{4};+\infty\right[$

b) تحديد $g^{-1}(x)$:

$$\left(\forall x\in\left[\frac{-9}{8},+\infty\right[\right)\left(\forall y\in\left[\frac{-1}{4},+\infty\right[\right)$$

لدينا: $g^{-1}(x)=y$
$$\Leftrightarrow g(y)=x$$
$$\Leftrightarrow 2y^2+y-1=x$$
$$\Leftrightarrow 2y^2+y=x+1$$
$$\Leftrightarrow y^2+\frac{1}{2}y=\frac{x+1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{x}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9+8x}{16}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+\frac{1}{4}=\sqrt{\frac{9+8x}{16}} \\ y+\frac{1}{4}=\sqrt{9+8x} \end{cases}$$

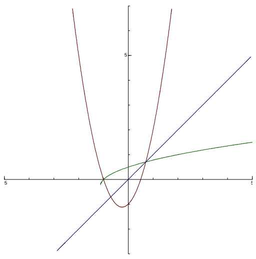
ولدينا $y\geq\frac{-1}{4}$ يعني $y+\frac{1}{4}\geq 0$

إذن $y+\frac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{9+8x}}{4}$

يعني $y=\dfrac{\sqrt{9+8x}-1}{4}$

إذن: $g^{-1}(x)=\dfrac{\sqrt{9+8x}-1}{4}$

3)



V) تطبيقات:

1) الدوال العكسية للدوال المثلثية:

a) دالة قوس الجيب $Arc\sin us$

نعتبر الدالة
$$f:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$$
$$x \to \sin x$$

لدينا f متصلة على $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$f'(x)=\cos x$

لدينا $f'(x)\rangle 0$ على $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ما عدا في $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ حيث تنعدم

إذن f تزايدية قطعا على $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right);f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=[-1,1]$$

إذن f تقابل من $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ نحو $[-1,1]$ وبالتالي تقبل دالة عكسية

$f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

الدالة f^{-1} تسمى دالة قوس الجيب. نرمز لها $Arc\sin$.

تعريف:

> نسمي دالة قوس الجيب الدالة العكسية للدالة
> $$f:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$$
> $$x\to\sin x$$
> ونرمز لها ب $Arc\sin$.

ملاحظة:

$$f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1] \qquad f^{-1}=Arc\sin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x\to\sin x \qquad x\to Arc\sin x$$

$$(\forall x\in[-1,1])\left(\forall y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right): f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x$$

$$Arc\sin x=y\Leftrightarrow \sin y=x$$

*) هذا يعني أن لكل x من $[-1,1]$ العدد $Arc\sin x$ هو العدد y من $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ الذي يحقق $\sin y=x$

*) $\begin{cases}Arc\sin x=y\Rightarrow\sin y=x\\ x\in[-1,1]\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}\sin y=x\Rightarrow Arc\sin x=y\\ y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$

أمثلة:

$\sin 0=0 \qquad \left(0\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \text{ و } Arc\sin 0=0\right)$

$$Arc\sin 1=\frac{\pi}{2}$$

$$Arc\sin-\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6};\ Arc\sin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$Arc\sin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$Arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$$

خاصيات:

1) الدالة $Arc\sin$ تقابل من $[-1,1]$ نحو $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2) الدالة $Arc\sin$ متصلة على $[-1,1]$

3) الدالة $Arc\sin$ تزايدية قطعا على $[-1,1]$

4) $D_{Arc\sin}=[-1,1]$

5) $(\forall x\in[-1,1]):-\frac{\pi}{2}\le Arc\sin x\le\frac{\pi}{2}$

6) $(\forall x\in[-1,1]):\sin(Arc\sin x)=x$

7) $\left(\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right):Arc\sin(\sin x)=x$

8) $(\forall x\in[-1,1]):Arc\sin x=Arc\sin y\Leftrightarrow x=y$
$\quad Arc\sin x<Arc\sin y \Leftrightarrow x<y$

9) $\left(\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right):\sin x=\sin y\Leftrightarrow x=y$
$\quad \sin x<\sin y \Leftrightarrow x<y$

10) الدالة $Arc\sin$ فردية.

برهان:

لنبين أن $Arc\sin$ فردية:

لكل x من $[-1,1]$ لدينا $-x\in[-1,1]$

لنبين أن $(\forall x\in[-1,1])\ Arc\sin(-x)=-Arc\sin x$

طريقة 1:

لدينا: $\sin(Arc\sin(-x))=-x$

$$\sin(-Arc\sin(x))=-\sin(Arc\sin(x))$$
$$=-x$$

إذن $(1)\ \sin(Arc\sin(-x))=\sin(-Arc\sin(x))$

ونعلم أن $(2)\ -\frac{\pi}{2}\le Arc\sin(-x)\le\frac{\pi}{2}$

و $-\frac{\pi}{2}\le Arc\sin(x)\le\frac{\pi}{2}$

يعني $(3)\ -\frac{\pi}{2}\le -Arc\sin(x)\le\frac{\pi}{2}$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $Arc\sin(-x)=-Arc\sin x$

وبالتالي الدالة $Arc\sin$ فردية.

طريقة 2:

لنبين أن $Arc\sin(-x)=-Arc\sin x$

نستعمل التكافؤات المتتالية:

لدينا: $Arc\sin(-x)=-Arc\sin x$

$$\Leftrightarrow\sin(Arc\sin(-x))=\sin(-Arc\sin x)$$

لأن $Arc\sin x$ و $Arc\sin(-x)$ من $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow -x=-\sin(Arc\sin x)$$
$$\Leftrightarrow -x=-x$$

بما أن العبارة الأخيرة صحيحة فإن $Arc\sin(-x)=-Arc\sin(x)$

طريقة 3:

لنبين أن $Arc\sin(-x)=-Arc\sin(x)$

نضع $Arc\sin(-x)=y$ مع $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

لدينا:

$$\left(y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)Arc\sin(-x)=y\Leftrightarrow\sin y=-x$$
$$\Leftrightarrow -\sin y=x$$
$$\Leftrightarrow \sin(-y)=x$$
$$\Leftrightarrow Arc\sin(\sin -y)=Arc\sin x$$
$$\left(-y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)\Leftrightarrow -y=Arc\sin x$$
$$\Leftrightarrow y=-Arc\sin x$$
$$\Leftrightarrow Arc\sin(-x)=-Arc\sin x$$

طريقة 4:

لنبين أن: $Arc\sin(-x)=-Arc\sin x$

ملاحظة: لكي نبين أن $Arc\sin\alpha=\beta$ يكفي أن نبين أن

$\sin\beta=\alpha$ و $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$

لدينا: $\sin(-Arc\sin x)=-\sin(Arc\sin x)$

$(1)\ \sin(-Arc\sin x)=-x$

ولدينا $-\frac{\pi}{2}\le -Arc\sin x\le\frac{\pi}{2}$

من (1) و (2) نستنتج أن $Arc\sin(-x)=-Arc\sin x$

تمرين تطبيقي: أحسب ما يلي :

1) $Arc\sin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

2) $Arc\sin\left(\sin\frac{107\pi}{3}\right)$

1- $Arc\sin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=Arc\sin\left(\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=Arc\sin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$

لأن $\left(\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$

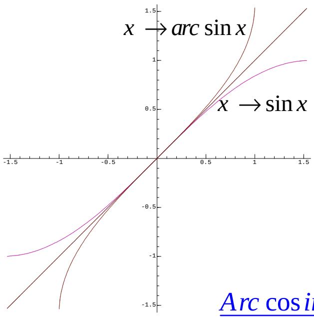
2- $Arc\sin\left(\sin\frac{107\pi}{3}\right)=Arc\sin\left(\sin\left(35\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$=Arc\sin\left(\sin\left(35\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=Arc\sin\left(\sin-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$

لأن $\left(-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$

التمثيل المبياني للدالة $Arc\sin$.



b) الدالة قوس جيب التمام $Arc\cos inus$

نعتبر الدالة: $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$

$x\to\cos x$

لدينا f متصلة على $[0,\pi]$

$f'(x)=-\sin x$

لدينا $f'(x)<0$ على $[0,\pi]$ ما عدا في 0 و π حيث تنعدم، إذن f تناقصية قطعا على $[0,\pi]$.

$f([0,\pi])=[f(\pi),f(0)]=[-1,1]$

إذن f تقابل من $[0,\pi]$ نحو $[-1,1]$ وبالتالي تقبل دالة عكسية:

$f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$

f^{-1} تسمى دالة قوس جيب التمام. نرمز لها ب $Arc\cos$.

تعريف:

نسمي دالة قوس جيب التمام الدالة العكسية للدالة:
$f:[0,\pi]\to[-1,1]$ ونرمز لها ب $Arc\cos$
$x\to\cos x$

ملاحظة: $f:[0,\pi]\to[-1,1]$ ، $x\to\cos x$ ؛ $f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$ ، $x\to Arc\cos x$

$(\forall x\in[-1,1])\forall y\in[0,\pi]\ Arc\cos x=y\Leftrightarrow\cos y=x$

لكل x من $[-1,1]$ العدد $Arc\cos x$ هو العدد y من $[0,\pi]$ الذي يحقق $\cos y=x$.

* $Arc\cos x=y\Rightarrow\cos y=x$

* $\begin{cases}\cos y=x\Rightarrow Arc\cos x=y\\ y\in[0,\pi]\end{cases}$

أمثلة:

$Arc\cos 0=\frac{\pi}{2}$ ، $Arc\cos 1=0$

$Arc\cos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$ ، $Arc\cos\frac{\sqrt3}{2}=\frac{\pi}{6}$

$Arc\cos\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\pi}{4}$ ، $Arc\cos-1=\pi$

$Arc\cos-\frac{1}{2}=\frac{2\pi}{3}$ ، $Arc\cos-\frac{\sqrt3}{2}=\frac{5\pi}{6}$

خاصيات:

1- الدالة $Arc\cos$ تقابل من $[-1,1]$ نحو $[0,\pi]$

2- الدالة $Arc\cos$ متصلة على $[-1,1]$

3- الدالة $Arc\cos$ تناقصية قطعا على $[-1,1]$

4- $D_{Arc\cos}=[-1,1]$

5- $(\forall x\in[-1,1])\ 0\le Arc\cos x\le\pi$

6- $(\forall x\in[-1,1])\ \cos(Arc\cos x)=x$

7- $(\forall x\in[0,\pi])\ Arc\cos(\cos x)=x$

8- $(\forall x ,y\in[-1,1])\ Arc\cos x=Arc\cos y\Leftrightarrow x=y$

$Arc\cos x<Arc\cos y\Leftrightarrow x>y$

9- $(\forall x ,y\in[0,\pi])\ \cos x=\cos y\Leftrightarrow x=y$

$\cos x<\cos y\Leftrightarrow x>y$

10- الدالة $Arc\cos$ ليست لا زوجية ولا فردية.

ملاحظة: لكي نبين أن $a=b$ يكفي أن نبين أن $\cos a=\cos b$ و a و b ينتميان ل $[0,\pi]$.

مثال:

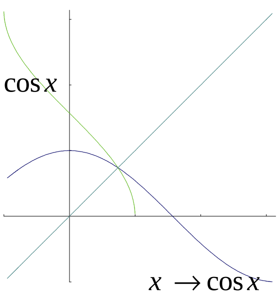
احسب $Arc\cos\left(\cos\frac{11}{3}\pi\right)$

$Arc\cos\left(\cos\frac{11}{3}\pi\right)=Arc\cos\left(\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=Arc\cos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=Arc\cos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]\right)$

التمثيل المبياني للدالة $Arc\cos$



c) الدالة قوس الظل $Arc\tan gente$.

نعتبر الدالة: $f:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$

$x\to\tan x$

لدينا f متصلة على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\qquad f^{-1}(x)=1+\tan^2 x\rangle 0$$

إذن f تزايدية قطعا على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$f\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]\lim_{-\frac{\pi}{2}^+} f(x),\lim_{\frac{\pi}{2}^-} f\right[$$

$$=\left]-\infty,+\infty\right[=\mathbb{R}$$

إذن f تقابل من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$

وبالتالي تقبل دالة عكسية $f^{-1}:\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

تسمى f^{-1} دالة قوس الظل نرمز لها ب $Arc\tan$.

تعريف:

نسمي دالة قوس الظل الدالة العكسية للدالة
$f:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ ونرمز لها ب $Arc\tan$
$x\to\tan x$

ملاحظة:

$f:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$; $x\to\tan x$

$f^{-1}:\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; $x\to Arc\tan x$

$$(\forall x\in\mathbb{R})\left(\forall y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\ Arc\tan x=y\Leftrightarrow\tan y=x$$

*) لكل x من $\mathbb{R}$ العدد $Arc\tan$ هو العدد y من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $\tan y=x$.

*) $Arc\tan x=y\Rightarrow\tan y=x$

*) $\begin{cases}\tan y=x\Rightarrow Arc\tan x=y\\ y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

أمثلة:

$Arc\tan 0=0$; $Arc\tan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$

$Arc\tan 1=\frac{\pi}{4}$; $Arc\tan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$

$Arc\tan(-1)=-\frac{\pi}{4}$; $Arc\tan\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$

خاصيات:

1) الدالة $Arc\tan$ تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2) الدالة $Arc\tan$ متصلة على $\mathbb{R}$

3) الدالة $Arc\tan$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

4) $D_{Arc\tan}=\mathbb{R}$

5) $(\forall x\in\mathbb{R})-\frac{\pi}{2}\langle Arc\tan\langle\frac{\pi}{2}$

6) $(\forall x\in\mathbb{R})\tan\left(Arc\tan x\right)=x$

7) $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)Arc\tan\left(\tan x\right)=x$

8) $(\forall x,y\in\mathbb{R})Arc\tan x=Arc\tan y\Leftrightarrow x=y$

$Arc\tan x\langle Arc\tan y\Leftrightarrow x\langle y$

9) $\left(\forall x,y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\tan x=\tan y\Leftrightarrow x=y$

$\tan x\langle\tan y\Leftrightarrow x\langle y$

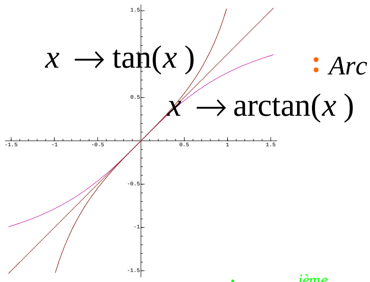
10) الدالة $Arc\tan$ فردية.

برهان: نفس برهان $Arc\sin$

ملاحظة:

لكي نبين أن $a=b$ يكفي أن نبين أن $\tan a=\tan b$ و a و b ينتميان إلى $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

التمثيل المبياني للدالة $Arc\tan$:



2) دالة الجذر من الرتبة n _ $racine\ \ n^{ième}$

a) تعريف:

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

نعتبر الدالة: $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

$x\to x^n$

* لدينا f متصلة على $\mathbb{R}^+$

* $f'(x)=nx^{n-1}$

لدينا $f'(x)\rangle 0$ على $\mathbb{R}^+$ ما عدا في 0 حيث تنعدم.

إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

* $f\left([0,+\infty[\right)=[0,+\infty[$

إذن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$ وبالتالي تقبل دالة عكسية $f^{-1}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$.

الدالة f^{-1} تسمى دالة الجذر من الرتبة n ونرمز لها ب $\sqrt[n]{\ }$.

تعريف

نسمي دالة الجذر من الرتبة n الدالة العكسية للدالة:
$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ونرمز لها ب $\sqrt[n]{\ }$.
$x\to x^n$

ملاحظة:

$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$; $x\to x^n$

$f^{-1}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$; $x\to\sqrt[n]{x}$

$$\left(\forall x,y\in\mathbb{R}^+\right)\sqrt[n]{x}=y\Leftrightarrow y^n=x$$

هذا يعني أن لكل x من $\mathbb{R}^+$ العدد $\sqrt[n]{x}$ هو العدد y من $\mathbb{R}^+$ والذي يحقق $y^n=x$.

*) $\sqrt[n]{x}=y\Rightarrow y^n=x$ دائما صحيحة

$\begin{cases}y^n=x\\ y\in\mathbb{R}^+\end{cases}\Rightarrow\sqrt[n]{x}=y$

*) لكي نبين أن $\sqrt[n]{\alpha}=\beta$ $(\alpha\in\mathbb{R}^+)$ يكفي أن نبين أن $\beta^n=\alpha$ $\beta\in\mathbb{R}^+$.

*) الجذر من الرتبة 2 هو الجذر مربع.
$(\forall x\geq 0)\ \sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$

*) $(\forall x\geq 0)\ \sqrt[1]{x}=x$

أمثلة:

$\sqrt[3]{8}=2$ $\qquad$ $\sqrt[4]{81}=3$

$-8=(-2)^3\Rightarrow \sqrt[3]{-8}=-2$

$(-2)^4=16\Rightarrow \sqrt[4]{16}=-2$

b) خاصيات:

1- الدالة $\sqrt[n]{\ }$ تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$

2- الدالة $\sqrt[n]{\ }$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

3- الدالة $\sqrt[n]{\ }$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$

4- $D_{\sqrt[n]{\ }}=\mathbb{R}^+$

5- $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{x}\geq 0$

6- $(\forall x,y\in\mathbb{R}^+)\ \sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$
$\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x<y$

7- $(\forall x,y\in\mathbb{R}^+)\ x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$
$x^n<y^n\Leftrightarrow x<y$

ملاحظة:

*) إذا كان n فردي:
$(\forall x,y\in\mathbb{R})\ x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$
$x^n<y^n \Leftrightarrow x<y$

*) إذا كان n زوجي:
$(\forall x,y\in\mathbb{R})\ x^n=y^n\Leftrightarrow |x|^n=|y|^n\Leftrightarrow |x|=|y|$
$x^n<y^n\Leftrightarrow |x|<|y|$

*) لكي نبين أن $a=b$ يكفي أن نبين أن
$\begin{cases}a^n=b^n\\ a,b\in\mathbb{R}^+\end{cases}$

8- لتكن f دالة موجبة على مجال I .

*) إذا كانت f متصلة على I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I .

*) إذا كانت f تقبل نهاية l في x_0 فإن $\sqrt[n]{f}$ تقبل نهاية $\sqrt[n]{l}$ في x_0 .

c) حل المعادلة $x^n=a$

أمثلة:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $x^4=16$

لدينا: $x^4=16\Leftrightarrow |x|^4=16\Leftrightarrow |x|=\sqrt[4]{16}$
$\Leftrightarrow |x|=2$
$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

إذن: $S=\{2;-2\}$

2) $x^6=-10$

لدينا $-10<0$ و x^6 دائما موجبة

إذن المعادلة مستحيلة: $S=\varnothing$.

3) $x^3=7$

لدينا: $x^3=7\Leftrightarrow x^3=\left(\sqrt[3]{7}\right)^3\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{7}$ (لأن n فردي)

4) $x^3=-6$

لدينا: $x^3=-6\Leftrightarrow x^3=-\left(\sqrt[3]{6}\right)^3\Leftrightarrow x^3=\left(-\sqrt[3]{6}\right)^3$
$\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{6}$ (لأن n فردي)

d) العمليات على الجذور من الرتبة n :

خاصية:

ليكن n و p من IN^* و a و b من $\mathbb{R}^+$

*) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ و $\sqrt[n]{a^n}=a$

*) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

*) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$; $\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{a}$

*) $(b>0)\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$

*) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[p]{a}=\sqrt[np]{a^{n+p}}$

ملاحظة:

إذا كان $ab\geq 0$ $\qquad$ $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{|a|}.\sqrt[n]{|b|}$

$(b>0)$ $\qquad$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$

برهان:

* لنبين أن $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$

لدينا: $\left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^n\right]^p=\left(\sqrt[p]{a}\right)^p=a$

ولدينا $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\in\mathbb{R}^+$

إذن: $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$

* لنبين أن $\sqrt[n]{a}.\sqrt[p]{a}=\sqrt[np]{a^{n+p}}$

لدينا $\left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[p]{a}\right)^{np}=\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^p.\left(\left(\sqrt[p]{a}\right)^p\right)^n$
$=a^p.a^n=a^{n+p}$

ولدينا $\sqrt[n]{a}.\sqrt[p]{a}\in\mathbb{R}^+$ إذن $\sqrt[n]{a}.\sqrt[p]{a}=\sqrt[np]{a^{n+p}}$.

e) الأس الجذري لعدد حقيقي موجب قطعا:

تعريف:

ليكن $a>0$ وليكن $r\in\mathbb{Q}$

نفترض أن: $r=\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$ $(p,p'\in\mathbb{Z})$ $(q,q'\in\mathbb{N}^+)$

لنبين أن $\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[q']{a^{p'}}$

لدينا $\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{qq'}=a^{pq'}$
$\left(\sqrt[q']{a^{p'}}\right)^{qq'}=a^{p'q}$

ولدينا $pq'=p'q$ إذن: $a^{pq'}=a^{p'q}$

يعني: $\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{qq'}=\left(\sqrt[q']{a^{p'}}\right)^{qq'}$

إذن: $\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[q']{a^{p'}}$

نضع إذن: $a^r=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$

تعريف

ليكن $a>0$ و $r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ مع $p\in\mathbb{Z}$ و $q\in\mathbb{N}^*$

العدد a^r هو العدد المعرف بما يلي: $a^r=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$

أمثلة:

$$8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2\;;\quad 16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=\left(\sqrt[4]{16}\right)^3=2^3=8$$

$$8^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$(\forall a\geq 0)\,a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$$

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

ملاحظة:

باستعمال الأس الجذري العمليات على الجذور من الرتبة n تصبح:

*) $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}=a \quad ; \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$

*) $a^{\frac{1}{n}}.b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}$

*) $a^{\frac{p}{np}}=a^{\frac{1}{n}}$

*) $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad ; \quad \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{np}}$

*) $a^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{p}}=a^{\frac{n+p}{np}}$

خاصيات:

ليكن $a>0$ و $b>0$ و r و $r'\in\mathbb{Q}$

*) $a^r.a^{r'}=a^{r+r'} \quad ; \quad a^{-r}=\frac{1}{a^r}$

*) $\frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'} \quad ; \quad a^r.b^r=(ab)^r$

*) $\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r \quad ; \quad \left(a^r\right)^{r'}=a^{r.r'}$

برهان:

– لنبين أن $a^r.a^{r'}=a^{r+r'}$

نضع $r=\frac{p}{q}$ و $r'=\frac{p'}{q'}$

لدينا:

$$\begin{aligned}a^r.a^{r'}&=a^{\frac{p}{q}}.a^{\frac{p'}{q'}}\\&=\sqrt[q]{a^p}.\sqrt[q']{a^{p'}}\\&=\sqrt[qp']{a^{pp'}}.\sqrt[q'p]{a^{pp'}}=\sqrt[qp'q'p]{\left(a^{pp'}\right)^{qp'+q'p}}\\&=a^{\frac{qp'+q'p}{qq'}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}}=a^{r+r'}\end{aligned}$$