I. عموميات:

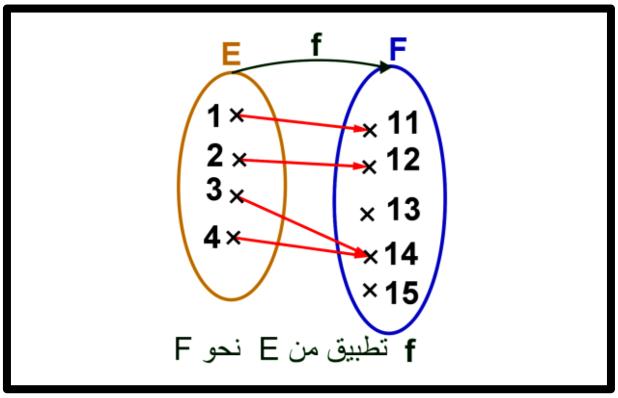
A. تطبيق:

1. نشاط:

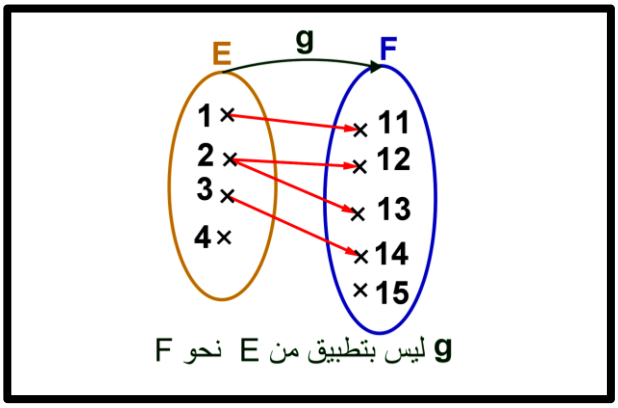
نعتبر المجموعتين: $E=\{1,2,3,4\}$ و $F=\{11,12,13,14,15\}$

نعتبر العلاقة f (أو g) التي تربط عناصر المجموعة E بعناصر المجموعة F كما يلي:

أ – حالة 1: f تطبيق:



ب – حالة 2: g ليست بتطبيق:



1. ماذا تلاحظ ؟

2. مفردات:

- العلاقة f تسمى تطبيق من E إلى F ونرمز له ب: f أو g أو h ......
- المجموعة E تسمى مجموعة الانطلاق. المجموعة F تسمى مجموعة الوصول.
- عنصر x من E يرمز له ب: و يسمى سابق. عنصر من F يرمز له ب: y و يسمى صورة.
- التطبيق f يربط x ب y لهذا نكتب: $f(x)=y$.
- نلخص ما سبق ب:

$$\begin{aligned} f:E&\to F\\ x&\mapsto f(x)=y\end{aligned}$$

3. تعريف:

E و F مجموعتان غير فارغتين.
كل علاقة f تربط كل عنصر x من E بعنصر وحيد y من F تسمى تطبيقا من E إلى F (E نحو F).
و نكتب :

$$\begin{aligned} f:E&\to F\\ x&\mapsto f(x)=y\end{aligned}$$

4. ملحوظة:

- كل دالة عددية هي تطبيق من مجموعة تعريفها نحو $\mathbb{R}$.
- كل تطبيق: $f:E\to F$ هو دالة من E نحو F.
- إذا كان $F=E$ نقول أن f تطبيق في E.
- $\begin{aligned} f:E&\to F\\ x&\mapsto f(x)=y\end{aligned}$ و $\begin{aligned} g:E'&\to F'\\ x&\mapsto g(x)=y\end{aligned}$ تطبيقين متساويين إذ وفقط إذا كان: $\left.\begin{aligned} &E=E' \ \wedge\ F=F'\\ &\forall x\in E: f(x)=g(x)\end{aligned}\right\}$

  و نكتب: $f=g$.

5. تمرين:

- تمرين 1: نعتبر التطبيق التالي.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto f(n) = |n|$$

1. حدد صور 0 و 2- و 3. ثم حدد سوابق 1 و 0 و 3.
2. هل الاستلزام : $f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$ صحيح ؟

- تمرين2: نعتبر التطبيق التالي.

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$(n,m) \mapsto f((n,m)) = n \times m$$

3. حدد صور $(1,0)$ و $(2,-3)$ و $(-6,1)$. ثم حدد سوابق 1 و 6 و 0.
4. هل لكل (n,m) و (n',m') من $\mathbb{N}^2$ الاستلزام صحيح: $f((n,m)) = f((n',m')) \Rightarrow n = n'$ و $m=m'$

- مثال 3:

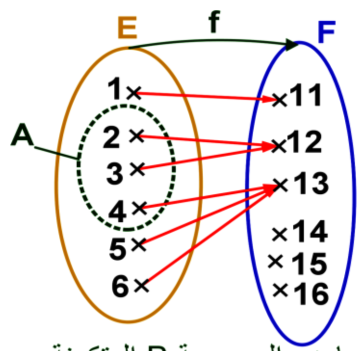
هل التطبيقين التاليين متساويين ؟

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$$
و
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = x^2 - 1$$
.

B. الصورة المباشرة لجزء A من مجموعة الانطلاق:

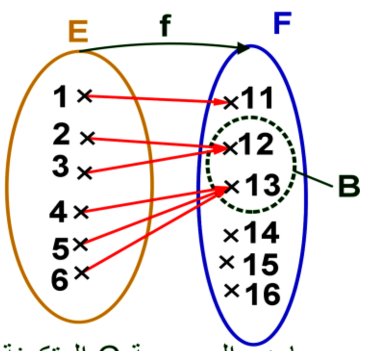
1. نشاط: نعتبر التطبيق التالي.

1. حدد المجموعة B حيث عناصرها هي صور لعناصر A .



ما هي المجموعة B المتكونة من صور عناصر الجزء A ؟

2. حدد المجموعة C حيث عناصرها هي سوابق لعناصر B .



ما هي المجموعة C المتكونة من سوابق عناصر الجزء B ؟

2. مفردات:

- المجموعة: $B = \{12,13\}$ تسمى الصورة المباشرة للجزء A من مجموعة الانطلاق E و نرمز لها ب $B = f(A)$.

و نكتب: $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$.

- المجموعة: $C = \{2,3,4,5,6\}$ تسمى الصورة العكسية للجزء B من مجموعة الوصول F و نرمز لها ب: $C = f^{-1}(B)$.

و نكتب: $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.

3. تعاريف:

- تعريف 1:

f تطبيق من E إلى F . A جزء من E (أي $A \subset E$)

صور عناصر A تكون مجموعة B (و هي جزء من F) تسمى الصورة المباشرة للجزء A . ويرمز لها: $B = f(A)$

و منه : $f(A) = \{f(x) / x \in A\} \subset F$

إذن: $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A : y = f(x)$

- **تعريف 2:**

f تطبيق من E إلى F . B جزء من F (أي $B\subset F$).
سوابق عناصر B تكون مجموعة C (وهي جزء من E) تسمى الصورة العكسية للجزء B . ويرمز لها: $C=f^{-1}(B)$
و منه: $f^{-1}(B)=\{x\in E/f(x)\in B\}\subset E$.
إذن: $x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x)\in B$

4. تمارين :

- **تمرين 1:**

نعتبر التطبيق التالي:

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$n\mapsto f(n)=2n$$

1. حدد $f(\{0,1,2,5\})$ و $f^{-1}(\{4,6,12\})$.
2. حدد $f(\mathbb{N})$ و $f^{-1}(\{0,2,4,\cdots,2n,\cdots\})=f^{-1}(2\mathbb{N})$.
3. هل الاستلزام التالي صحيح ؟ $\forall n,n'\in\mathbb{N}: f(n)=f(n')\Rightarrow n=n'$.

تمرين 2:

نعتبر التطبيق التالي:

$$f:\quad \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$X=(a,b)\mapsto f(X)=f((a,b))=a$$

1. حدد $f((2,1))$ و $f((2,7))$.
2. أكتب بالإدراك $f^{-1}(\{2\})$ (أي مجموعة سوابق 2)
3. هل الاستلزام التالي صحيح ؟
$f((a,b))=f((a',b'))\Rightarrow(a,b)=(a',b')$
و ذلك لكل (a,b) و (a',b') من $\mathbb{N}^2$.

5. خاصيات :

A و B جزآن من مجموعة E . C و D جزآن من مجموعة F . f تطبيق من E إلى F.

1. $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$
2. أ - $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.
ب - $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.
3. $C\subset D\Rightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$
4. أ - $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.
ب – $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

6. برهان :

1. نبين أن : $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$

لدينا : $A\subset B$ و نبين $f(A)\subset f(B)$.
ليكن $y_A\in f(A)$ إذن : يوجد x_A من A حيث : $y_A=f(x_A)$
ومنه : $(1)\ \ y_A\in f(A)\Leftrightarrow\exists x_A\in A/y_A=f(x_A)$.
إذن : $(1)\Rightarrow\exists x_A\in B/y_A=f(x_A)$ (لأن $A\subset B$)
و بالتالي : $f(x_A)\in f(B)$.
خلاصة : $f(A)\subset f(B)$.

2. نبين أن :

أ- $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

- $\subset$ نبين أن : $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$.

ليكن : y من $f(A\cup B)$ إذن يوجد $x\in A\cup B$ حيث $y=f(x)$.

و منه : $x\in A\cup B\Rightarrow x\in A$ أو $x\in B$

$\Rightarrow f(x)\in f(A)$ أو $f(x)\in f(B)$

$\Rightarrow y=f(x)\in f(A)\cup f(B)$

خلاصة 1 : $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$.

- $\supset$ نبين أن : $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

لدينا : $A\subset A\cup B\Rightarrow f(A)\subset f(A\cup B)$ حسب الخاصية 1 .

$B\subset A\cup B\Rightarrow f(B)\subset f(A\cup B)$.

ومنه : $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

خلاصة 2 : $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

خلاصة : $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

ب- $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

ليكن : y من $f(A\cap B)$ إذن يوجد $x\in A\cap B$ حيث $y=f(x)$.

و منه : $x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$ و $x\in B$

$\Rightarrow f(x)\in f(A)$ و $f(x)\in f(B)$

$\Rightarrow y=f(x)\in f(A)\cap f(B)$

خلاصة 1 : $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

3. نبين أن : $C\subset D\Rightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$.

ليكن x من $f^{-1}(C)$.

$$x\in f^{-1}(C)\Rightarrow f(x)\in C$$
$$\Rightarrow f(x)\in D$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}(D)$$

ومنه : $f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$.

4. نبين أن :

أ - $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

- نبين : $f^{-1}(C\cap D)\subset f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

لدينا : $\begin{cases} A\cap B\subset A\Rightarrow f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A) \\ A\cap B\subset B\Rightarrow f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(B) \end{cases}$ إذن : $f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.

- نبين : $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C\cap D)$.

ليكن x من $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

$x\in f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)\Rightarrow x\in f^{-1}(C)$ و $x\in f^{-1}(D)$

$\Rightarrow f(x) \in C$ و $f(x) \in D$

$\Rightarrow f(x) \in C \cap D$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C \cap D)$

ومنه : $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D)$.

خلاصة : $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

ب - نبين : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

- نبين : $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$

لدينا : $\begin{cases} A \subset A \cup B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B) \\ B \subset A \cup B \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B) \end{cases}$ إذن : $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$.

- نبين : $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

ليكن x من $f^{-1}(C \cup D)$.

$x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \cup D$

$\Rightarrow f(x) \in C$ أو $f(x) \in D$

حالة 1 : $f(x) \in C$

إذن : $x \in f^{-1}(C)$ و نعلم أن : $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

حالة 21 : $f(x) \in C$

إذن : $x \in f^{-1}(C)$ و نعلم أن : $f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

في كلتا الحالتين : $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

و منه: $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

خلاصة : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. (ملحوظة : يمكن الاستدلال بالتكافؤات المتتالية)

C. قصور دالة - تمديد دالة:

1. نشاط:

نعتبر التطبيقين التاليين:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = |x| - 5x$$ و $$g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = -4x$$

1. ما هي العلاقات التي تربط التطبيق g بالتطبيق f ؟

جواب:

العلاقات هي:

- $[0,+\infty[\subset \mathbb{R}$.
- و $\forall x \in [0,+\infty[, g(x) = f(x)$.

2. مفردات:

التطبيق g يكتفي أو يقتصر على إعطاء صور x من $[0,+\infty[$. ولهذا التطبيق g يسمى قصور التطبيق f على $[0,+\infty[$.

كل تطبيق h يواصل على إعطاء صور x من B حيث $A \subset B$ يسمى تمديدا للتطبيق f على B .

3. تعريف 1: (قصور)

f تطبيق من E نحو F.
- كل تطبيق g حيث :
  -1 مجموعة انطلاقه هي A حيث $A \subset E$.
  -2 $\forall x \in A : g(x) = f(x)$

  g يسمى قصور للتطبيق f على A.

إذن:

$$g : A\ (A \subset E) \to F$$
$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

4. تعريف 2 : (تمديد)

f تطبيق مجموعة انطلاقه E . كل تطبيق h مجموعة انطلاقه B و يحقق ما يلي :

-1 $E \subset B$

-2 $\forall x \in E , h(x) = f(x)$

h يسم تمديد للتطبيق f على B.

إذن:
$$\begin{cases} x \in E , h(x) = f(x) \\ x \in B \setminus E , h(x) = h(x) \end{cases}$$

5. ملحوظة: تمديد ليس بوحيد.

6. تمرين:

تمرين 1:

نعتبر التطبيقين التاليين:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = |x| - 5x$$

و

$$g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = -4x$$

1. هل التطبيق g قصور التطبيق f على $[0,+\infty[$ ؟

تمرين 2:

نعتبر التطبيق التالي.

$$f : [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 2x^3$$

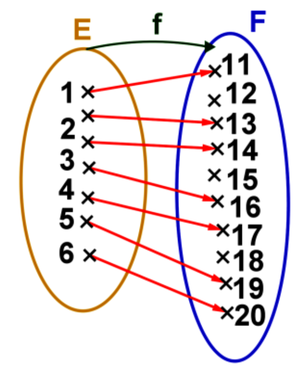
1. هل التطبيق g هو تمديد للتطبيق f على $\mathbb{R}$ حيث؟
2. هل التطبيق g هو تمديد للتطبيق f على $\mathbb{R}$ حيث؟

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = -2x^4 + 2x^3 |x+1|$$

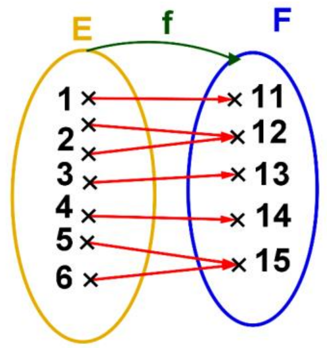
II. التطبيق التبايني – الشمولي –التطبيق التقابلي – التقابل العكسي:

A. التطبيق التبايني:

1. نشاط: نعتبر التطبيقين التاليين.



ماذا تلاحظ بالنسبة لعناصر المجموعة F ؟



ماذا تلاحظ بالنسبة لعناصر المجموعة F ؟

2. تعريف:

f تطبيق من E نحو F.
f يسمى تطبيق تبايني (أو تباين) إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من F له سابقا واحد على الأكثر من E.
أو أيضا : $(\forall x,x'\in E : f(x)=f(x')\Rightarrow x=x')$ $\Leftrightarrow$ f تبايني.

3. تمرين :

نعتبر التطبيق التالي :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f((x,y))=(x,0) \end{aligned}$$
هل التطبيق f تبايني ؟

B. التطبيق الشمولي:

1. تعريف:

f تطبيق من E نحو F.
f يسمى تطبيق شمولي إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من F يقبل سابقا واحدا على الأقل من E.
أو أيضا: $(\forall y\in F,\exists x\in E : y=f(x))$ $\Leftrightarrow$ f شمولي

2. ملحوظة:

- كي نبرهن على أن f شمولي نبين أن المعادلة $x\in E : f(x)=y$ لها على الأقل حل في E مهما يكن y من F (المجهول هو x أما y من F).
- $f(E)=F$ $\Leftrightarrow$ f شمولي

3. تمارين :

تمرين 1 :
نعتبر التطبيق التالي :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)=3|x| \end{aligned}$$
1. هل التطبيق f شمولي؟
2. هل g قصور التطبيق f على $[0,+\infty[$ شمولي؟ حيث:
$$\begin{aligned} g : [0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x)=3x|x+1|-3x^2 \end{aligned}$$

تمرين 2:
نعتبر التطبيق التالي :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f((x,y))=(x,0) \end{aligned}$$
1. هل التطبيق f شمولي؟

تمرين 3:
نعتبر التطبيق التالي :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)=x^2-2x \end{aligned}$$
1. هل التطبيق f شمولي؟

C. التطبيق التقابلي – التطبيق العكسي:

1. تعريف:

f تطبيق من E نحو F.
- f يسمى تطبيق تقابلي إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من F له سابقا وحيدا x من E.
  $(\forall y\in F,\exists! x\in E : y=f(x))$ $\Leftrightarrow$ f تقابلي .
- التطبيق g من F إلى E الذي يربط كل عنصر y من F بالعنصر الوحيد x من E حيث $y=f(x)$ يسمى التطبيق العكسي ل f ؛ و يرمز له ب: $g=f^{-1}$.

2. ملحوظة:

- التطبيق العكسي f^{-1} يكتب على الشكل التالي :

$$\begin{array}{l} f^{-1}: F \to E \\ y \mapsto f^{-1}(y) = x \end{array}$$ أو أيضا : $$\begin{array}{l} f^{-1}: F \to E \\ x \mapsto f^{-1}(x) \end{array}$$ و ذلك باستعمال المتغير x بدل من y

- العلاقة التي تربط f و f^{-1} هي : $\left\{\begin{array}{l} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = f(x) \\ x \in E \end{array}\right\}$

- لكي نبرهن على أن f تقابلي نبين أن المعادلة $x \in E : f(x) = y$ لها على حل وحيد مهما يكن y من F.

3. تمارين:

تمرين 1:

نعتبر التطبيق التالي :

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 3x - 2 \end{array}$$

1. هل التطبيق f تقابلي؟
2. حدد تقابله العكسي f^{-1}.

تمرين 2 :

نعتبر التطبيق التالي :

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = x^2 - 2x \end{array}$$

1. هل التطبيق f تقابلي؟

تمرين 3:

نعتبر التطبيق التالي :

$$\begin{array}{l} f : [2,+\infty[\to [0,+\infty[\\ x \mapsto f(x) = \sqrt{2x-4} \end{array}$$

1. هل التطبيق f تقابلي؟
2. إذا كان الجواب بنعم ، حدد تقابله العكسي f^{-1}.

III. مركب التطبيقات:

1. تعريف:

f و g تطبيقان حيث : $f : E \to F$ و $g : F \to G$.

التطبيق $h : E \to G$ المعرف ب: $h(x) = g(f(x))$ لكل x من E و يسمى مركب التطبيقين f و g في هذا الترتيب.

يرمز له ب: $g \circ f$. إذن :

$$\begin{array}{l} h = g \circ f : E \to G \\ x \mapsto h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) \end{array}$$

2. ملحوظة:

- مركب تطبيقان ليس بتبادلي دائما.
- مركب التطبيقات هو تجمعي: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$
- f تقابل و تقابله العكسي هو f^{-1}

لدينا:

-1 $\forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x$ أي: $f \circ f^{-1} = Id_F$

-2 $\forall x \in E : f^{-1} \circ f(x) = x$ أي $f^{-1} \circ f = Id_E$

توضيح للملاحظة الأخيرة:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{f^{-1}} & E \\ x & \mapsto & f(x) = y & \mapsto & f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x \end{array}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{f^{-1} \circ f}$$

إذن: $\forall x \in E : f^{-1}(f(x)) = x$ أي $f^{-1} \circ f = Id_E$

لدينا:

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{f^{-1}} & E & \xrightarrow{f} & F \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) = x & \mapsto & f(x) = f(f^{-1}(y)) = y \end{array}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{f \circ f^{-1}}$$

إذن: $\forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x$ أي $f \circ f^{-1} = Id_F$.

3. تمارين :

- تمرين 1:

حدد : $f\circ g$ ثم $g\circ f$ حيث : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $f(x)=4x^3-2x$ و $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

- تمرين 2:

لنعتبر الدالة f المعرفة ب:

$$f:\left[\sqrt{2},+\infty\right[\to\left[\sqrt{2},+\infty\right[$$
$$x\mapsto f(x)=\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)^2$$

1. بين أن : f تقابل في $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$.
2. أحسب: f^2 ثم استنتج الدالة العكسية f^{-1} .