تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

I- تذكير

تعاريف

تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين . نعتبر A و B و C ثلاث نقط من المستوى حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ و C' المسقط العمودي لـ C على (AB)

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بحيث

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC'}$

تعريف

الجداء السلمي للمتجهتين الغير المنعدمتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}\cdot\vec{v}$ بحيث $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$

α قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

ملاحظة

*- إذا كانت $\vec{u}$ أو $\vec{v}$ منعدمة فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

*- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمتين فان $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

خاصيات

مهما كانت المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و العدد الحقيقي α

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

$\vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}$

$(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$

تعامد متجهتين

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

II- صيغ تحليلية

1- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

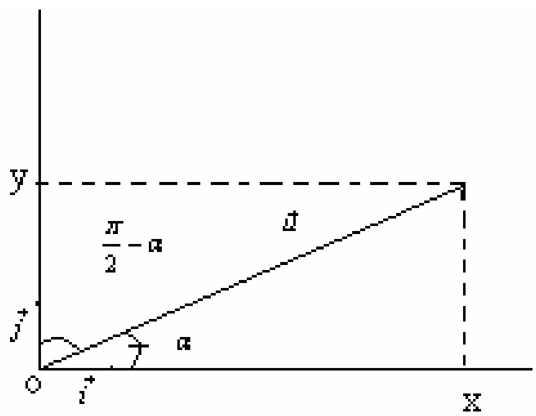
إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

ملاحظة إذا كان $\vec{u}(x;y)$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم $(\vec{i};\vec{j})$ فان $\vec{u}\cdot\vec{i}=x$; $\vec{u}\cdot\vec{j}=y$

أمثلة أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ في الحالات.................

2- إحداثيتا متجهة في أساس متعامد ممنظم مباشر

ليكن $\vec{u}(x;y)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{i};\vec{j})$ و α قياس $(\widehat{\vec{i};\vec{u}})$



لدينا $x=\vec{u}\cdot\vec{i}$; $y=\vec{u}\cdot\vec{j}$

ومنه $x=\|\vec{u}\|\|\vec{i}\|\cos\alpha$ $\quad$ $y=\|\vec{u}\|\|\vec{j}\|\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

إذن $x=\|\vec{u}\|\cos\alpha$ $\quad$ $y=\|\vec{u}\|\sin\alpha$

خاصية

إذا كان $(x;y)$ زوج إحداثيتي متجهة غير منعدمة $\vec{u}$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i};\vec{j})$ و α قياس $(\widehat{\vec{i};\vec{u}})$ فان $\vec{u}=\|\vec{u}\|\left(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}\right)$

حالة خاصة

إذا كانت $\vec{u}$ متجهة واحدية (أي $\|\vec{u}\|=1$) فان $\vec{u}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}$

3- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة نقطتين

* إذا كان $(x;y)$ زوج إحداثيتي $\vec{u}$ بالنسبة لأساس متعامد ممنظم $(\vec{i};\vec{j})$ فان $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

* إذا كان $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ فان

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

4- الشرط التحليلي لتعامد متجهتين

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان حيث $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

تمرين

حدد المتجهات الواحدية و المتعامدة مع $\vec{u}(-1;2)$

$$\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{v}\\ \|\vec{v}\|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+2y=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}\text{..........}$$

تمرين نعتبر $A(1;3)$ $\quad$ $B(3;1)$ $\quad$ $C(-3;-1)$

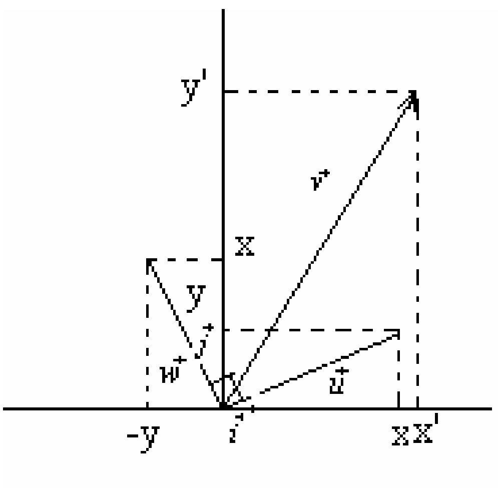
بين أن ABC قائم الزاوية في A

5- حساب $\cos\theta$ و $\sin\theta$

* المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ و θ قياس $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ فان $\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

* نعتبر المتجهة $\vec{w}$ بحيث $\overline{(\vec{u};\vec{w})}=\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ $\quad$ $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$



لدينا باستعمال علاقة شال $\overline{(\vec{u};\vec{v})}$ $\quad$ $-\overline{(\vec{u};\vec{w})}=\overline{(\vec{v};\vec{w})}$

$$\overline{(\vec{v};\vec{w})} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

نعلم أن $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|\|\vec{v}\|}$$

لدينا $\vec{v}\cdot\vec{w} = xy' - yx' = \det(\vec{u};\vec{v})$

إذن $\sin\theta = \frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

تمرين

ليكن θ القياس الرئيسي للزاوية $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ حيث $\vec{u}(-\sqrt{3};-3)$ و $\vec{v}(-1;\sqrt{3})$. حدد θ.

III- معادلة مستقيم معرف بمتجهة منظمية

1- متجهة منظمية

تعريف (D) مستقيم في المستوى، كل متجهة غير منعدمة عمودية على متجهة موجهة للمستقيم (D) تسمى متجهة منظمية على المستقيم (D).

2- خاصيات

* إذا كانت $\vec{n}$ منظمية على (D) فان كل متجهة $k\vec{n}$ ، $(k \in \mathbb{R}^*)$ منظمية عليه.
* إذا كانت $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ متجهتين منظميتين على مستقيم (D) فانهما تكونان مستقيميتين .
* اذا كانت $\vec{u}(a;b)$ موجهة ل(D) فان المتجهة $\vec{n}(-b;a)$ منظمية عليه.

2- معادلة مستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه

$\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى لتكن M نقطة

$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}(-b;a)$ مستقيميتان

$\Leftrightarrow$ M تنتمي إلى المستقيم المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(-b;a)$.

إذن مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A و الموجه ب $\vec{u}(-b;a)$

معادلته ستكون على شكل $ax + by + c = 0$

خاصية

لتكن $\vec{n}(a;b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى.

مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من A و الموجه ب $\vec{u}(-b;a)$

خاصية

إذا كانت $\vec{n}(a;b)$ منظمية على(D) فان معادلة (D) على شكل $ax + by + c = 0$

إذا كان $(D):\ ax + by + c = 0$ فان $\vec{n}(a;b)$ منظمية على(D)

تمرين

1- حدد متجهة منظمية لكل مستقيم من المستقيمات التالية

$(D_1)\ 3x - 2y + 1 = 0 \quad ; \quad (D_2): 2y - 1 = 0$

$(D_3): x - 3 = 0$

2- حدد المستقيم المار من $A(-1;3)$ و $\vec{n}(4;3)$ منظمية عليه

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر $A(2;1)$ و $B(0;1)$ و $C(-2;3)$ و $\vec{u}(-2;5)$

1- حدد معادلة للمستقيم (D) المار من A و $\vec{u}$ منظمية عليه

2- أ) حدد معادلة ديكارتية لواسط $[A;B]$

ب) حدد Ω تقاطع واسطات المثلث ABC

3- حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المار من A

3- شرط تعامد مستقيمين

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم م.م نعتبر

$(D'):a'x+b'y+c'=0$ $\quad$ $(D):ax+by+c=0$ حيث $(a';b')\neq(0;0)$; $(a;b)\neq(0;0)$

$$(D)\perp(D')\Leftrightarrow aa'+bb'=0$$

نتيجة

$(D'):y=m'x+p'$ $\quad$ $(D):y=mx+p$

$$(D)\perp(D')\Leftrightarrow mm'=-1$$

4- مسافة نقطة عن مستقيم

نشاط

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$. (D) المستقيم المار من $B(x_B;y_B)$ و $\vec{n}(a;b)$ منظمية عليه. لتكن $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى ، H المسقط العمودي للنقطة A على (D).

أ- أحسب $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}$ بدلالة $\overrightarrow{HA}$ و $\vec{n}$

ب- أثبت أن $HA=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}\right|}{\|\vec{n}\|}$

د- ليكن $(D):ax+by+c=0$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$

بين أن $HA=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

خاصية

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

ليكن $(D):ax+by+c=0$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$ و $A(x_0;y_0)$ نقطة من المستوى

مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي $d(A;(D))=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تمرين

$(D):3x-4y+1=0$; $A(-2;3)$

حدد $d(A;(D))$

تمرين

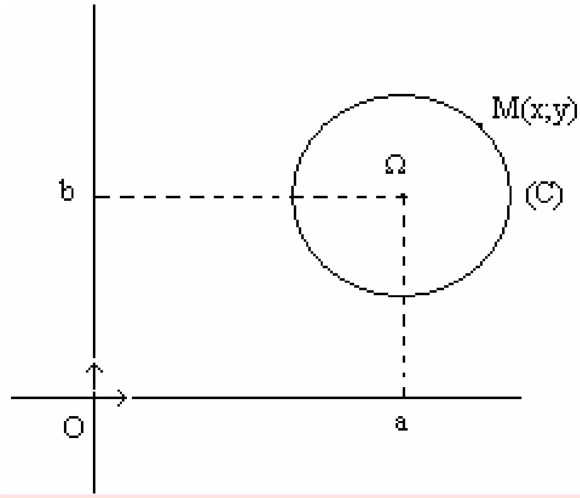
أحسب احداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة $A(-3;5)$

على المستقيم $(D):x-2y+8=0$

دراسة تحليلية لدائرة

I- معادلة دائرة

1- معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بمركزها و شعاعها



في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ،
نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r $(r \geq 0)$

$$M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \Omega M = r$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

مبرهنة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .
معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r $(r \geq 0)$ هي $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

حالة خاصة

معادلة الدائرة (C) التي مركزها أصل المعلم و شعاعها r هي $x^2+y^2=r^2$

أمثلة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم
1- حدد معادلة للدائرة التي مركزها $\Omega(-2;3)$ و شعاعها 4
2- حدد معادلة للدائرة التي مركزها $A(2;3)$ وتمر من النقطة $B(1;-3)$

ملاحظة

* بوضع $c = a^2+b^2-r^2$
معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ و شعاعها r تكتب على شكل $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$
* نعتبر $\{\Omega\}$ دائرة مركزها Ω و شعاعها منعدم

2- دراسة المعادلة $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

لتكن (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = a^2+b^2-c$$

إذا كان $a^2+b^2-c \prec 0$ فان $(E)=\varnothing$

إذا كان $a^2+b^2-c=0$ فان $(E)=\{\Omega(a;b)\}$

إذا كان $a^2+b^2-c \succ 0$ فان $(E)=C(\Omega(a;b);r)$ حيث $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$

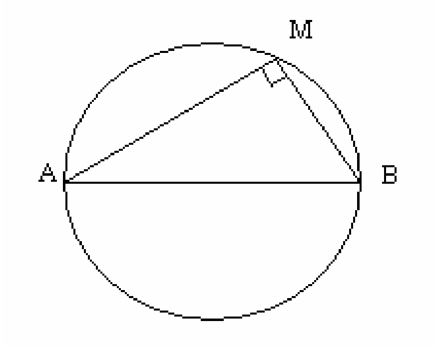
مبرهنة

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. a و b و c أعداد حقيقية.
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ هي معادلة لدائرة إذا وفقط إذا كان $a^2+b^2-c \geq 0$
مركز هذه الدائرة هو $\Omega(a;b)$ وشعاعها $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$

تمرين

حدد (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-2x+y+7=0$
حدد (E') مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-6x+4y-7=0$

3- معادلة معرف بأحد أقطارها



لتكن (C) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

مبرهنة

ليكن A و B نقطتين مختلفتين
مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ هي الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$
في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ، معادلة الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ هي
$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

تمرين

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر $A(-1;2)$ و $B(-5;4)$ و $C(-3;6)$

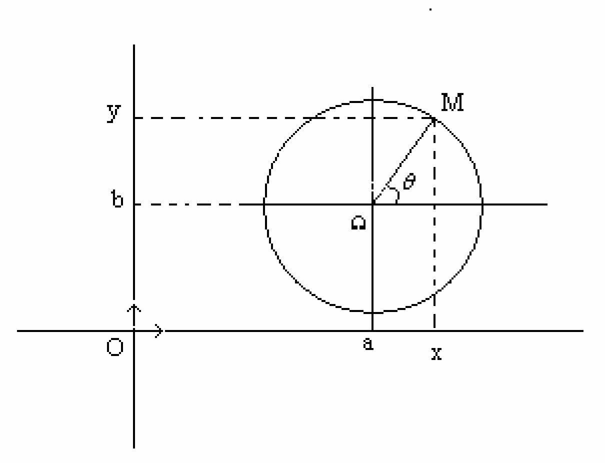
1- حدد الدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$

2- أ- تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية

ب- حدد معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث ABC

4- تمثيل بارامتري لدائرة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها غير منعدم r
$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{r}\right)^2+\left(\frac{y-b}{r}\right)^2=1$$



ومنه يوجد عدد حقيقي θ من $[0;2\pi[$ حيث
$$\begin{cases}\dfrac{x-a}{r}=\cos\theta\\ \dfrac{y-b}{r}=\sin\theta\end{cases}$$

$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow \quad \exists\theta\in\mathbb{R}/\ \begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$$

مبرهنة و تعريف

مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.
الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r $(r\succ 0)$ هي مجموعة النقط $M(x;y)$ التي
تحقق $\theta\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$
النظمة $\theta\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتري لدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r

حالة خاصة

التمثيل البارامتري للدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها r هي $\theta\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

تمرين

حدد تمثيلا بارامتريا للدائرة (C) المعرفة بالمعادلة $x^2+y^2+4x-6y+9=0$

5- داخل و خارج دائرة

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها r
نعتبر $c=a^2+b^2-r^2$
$$\Omega M=r\Leftrightarrow M(x;y)\in(C)$$
$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0\Leftrightarrow$$

M داخل $(C) \Leftrightarrow \Omega M \prec r$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c \prec 0$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. نعتبر (C) دائرة معادلتها $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

- داخل الدائرة (C) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2+y^2-2ax-2by+c \prec 0$
- خارج الدائرة (C) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2+y^2-2ax-2by+c \succ 0$

تمرين

حل مبيانيا

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+1 \prec 0 \\ x+y+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-2x+4y+1\right) \leq 0$$

II- تقاطع مستقيم ودائرة

1- مبرهنة

ليكن (D) مستقيم و (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r

* إذا كان $d(\Omega;(D)) \succ r$ فان $(D)\cap(C)=\varnothing$

* إذا كان $d(\Omega;(D)) = r$ فان $(D)\cap(C)$ أحادية

* إذا كان $d(\Omega;(D)) \prec r$ فان (D) و (C) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين.

تمرين

أدرس تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D) في الحالات التالية

1- $(C)=C\left(\Omega(1;-2);2\right)$ و $(D): x+2y-1=0$

2- $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ و $(D): 3x+4y-6=0$

3- $(C): x^2+y^2-2x+4y+1=0$ و $(D): 3x+4y-5=0$

2- المماس للدائرة

a- تعريف

لتكن (C) دائرة مركزها Ω

(D) مماس للدائرة (C) إذا وفقط إذا كان $d(\Omega;(D))=r$

ملاحظة

لتكن A نقطة من المستوى

إذا كان A داخل دائرة (C) فانه لا يوجد أي مماس لها مار من A

إذا كان $A \in (C)$ فانه يوجد مماس وحيد لـ (C) مار من A

إذا كان A خارج دائرة (C) فانه يوجد مماسان لها ماران من A

b- المماس لدائرة عند أحد نقطها

أ- تعريف

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و A نقطة منها

تقول إن المستقيم (D) مماس للدائرة (C) عند النقطة A إذا وفقط إذا كان (D) عموديا على (ΩA) في A.

ب- خاصية

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة منها

لتكن M نقطة من (D)

(D) مماس للدائرة (C) عند $A \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{MA}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M}\cdot\overrightarrow{\Omega A}=r^2$

خاصية

لتكن (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها r و A نقطة منها

(D) مماس للدائرة (C) عند النقطة A اذا وفقط اذا كان $\overrightarrow{\Omega M}\cdot\overrightarrow{\Omega A}=r^2 \quad \forall M\in(D)$

ج- معادلة المماس عند أحد نقطها

ليكن (D) مماس للدائرة (C) مركزها Ω و شعاعها r عند النقطة $A(x_0;y_0)$

لتكن $M(x;y)$

$$M\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega M}\cdot\overrightarrow{\Omega A}=r^2$$

$$M\in(D)\Leftrightarrow(x-a)(x-x_0)+(y-b)(y-y_0)=r^2$$

$$\Leftrightarrow xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$$

حيث $c=a^2+b^2-r^2$

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم. إذا كانت (C) دائرة معادلتها $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

فان معادلة المماس لها عند $A(x_0;y_0)$ هي $xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$

ملاحظة

معادلة المماس لدائرة مركزها أصل المعلم وشعاعها r عند النقطة $A(x_0;y_0)$ هي $xx_0+yy_0-r^2=0$

تمرين

نعتبر الدائرة $(C):x^2+y^2-x-2y=0$

تأكد أن $A(1;2)\in(C)$ حدد معادلة للمماس لـ(C) عند A

تمرين

في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم . نعتبر الدائرة (C)

التي معادلتها $x^2+y^2+2x-2y-2=0$

1- حدد مركز وشعاع (C)

2- حدد موضع $A(2;3)$ بالنسبة للدائرة (C)

3- حدد جميع المماسات للدائرة (C) المارة من A