مذكرة رقم : 4
الأستاذ : عثماني نجيب

# مذكرة رقم 4 في درس الاشتقاق ودراسة الدوال

**الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :**

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| - مراجعة ما سبقت دراسته في السنة الأولى: استعمال الدالة المشتقة لدراسة دالة عددية في حالة الدوال الحدودية من الدرجة الثانية والثالثة والدوال المتخاطة؛<br>- دراسة الدالة $x \to \sqrt{ax+b}$. | - التمكن من مشتقات الدوال الاعتيادية؛<br>- تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة مشتقتها؛<br>- تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني؛<br>- الحل المبياني لمعادلات من الشكل $f(x)=\lambda$ ومتراجحات من الشكل $f(x)\le\lambda$ حيث $f$ دالة اعتيادية. | - يتم التذكير بمفهوم الاشتقاق وتطبيقاته من خلال أنشطة متنوعة تبرز الأهمية التي يكتسبها في الدراسة الموضعية والشاملة للدوال المقررة وخاصة في التقريب المحلي لدالة وفي تحديد بعض المطاريف؛<br>- من خلال دراسة أمثلة لدوال حدودية ودوال جذرية تتم صيانة مكتسبات التلاميذ حول الاشتقاق وحساب النهايات وعناصر تماثل منحنى دالة وحل بعض المعادلات والمتراجحات مبيانيا؛<br>- دراسة إشارة $f'(x)$ لا ينبغي أن تطرح أية صعوبة للتلاميذ. |

## I. اشتقاق دالة في نقطة:

**تعريف:** نقول ان دالة $f$ قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0$ إذا وجد عدد حقيقي $\ell$ بحيث $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ والعدد $\ell$ يسمى العدد المشتق للدالة $f$ في النقطة $x_0$. و نكتب $\ell=f'(x_0)$

**ملاحظة:** إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ فان معادلة مماس المنحنى $(C_f)$ في النقطة التي أفصولها $x_0$ هي:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة $f$ عند $x_0=1$.

الجواب: (1 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}2(x+1)=2(1+1)=4=f'(1)\in\mathbb{R}$ اذن : الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$.

(2 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ و $f'(1)=4$ و $f(1)=2$ اذن :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=4(x-1)+2=4x-4+2$ ومنه $y=4x-2$ و هي معادلة المماس

**تمرين1:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=3x^2$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة $f$ عند $x_0=2$.

الجواب: (1 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-12}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{3(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(x+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}3(x+2)=3(2+2)=12=f'(2)\in\mathbb{R}$ اذن : الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.

(2 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ و $f'(2)=12$ و $f(2)=12$ اذن :

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=12(x-2)+12=12x-24+12$

$y=12x-12$ و هي معادلة المماس

## II. الدالة المشتقة:

### مشتقات الدوال الاعتيادية:

| المجال | $f'(x)$ | $f(x)$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $0$ | $k$ |
| $\mathbb{R}$ | $a$ | $ax$ |
| $\mathbb{R}$ | $2x$ | $x^2$ |
| $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ | $x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$ |
| $]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $\dfrac{1}{x}$ |

**أمثلة:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=2$ (1 $\quad f(x)=3x-5$ (2 $\quad f(x)=x^{10}$ (3

الأجوبة :

$f'(x)=(2)'=0$ (1 $\quad f'(x)=(3x-5)'=3$ (2

$f'(x)=\left(x^{10}\right)'=10x^{10-1}=10x^9$ (3

### العمليات على الدوال المشتقة:

| الشرط | مشتقتها | الدالة |
|---|---|---|
| | $u'+v'$ | $u+v$ |
| | $k\cdot u'$ | $k\cdot u$ |
| | $u'v+uv'$ | $u\cdot v$ |
| $u$ لا تنعدم في $I$ | $-\dfrac{u'}{u^2}$ | $\dfrac{1}{u}$ |
| $v$ لا تنعدم في $I$ | $\dfrac{u'v+uv'}{v^2}$ | $\dfrac{u}{v}$ |
| | $nu^{n-1}u'$ | $u^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$ |

**مثال1:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=2x^8$ (1 $\quad f(x)=5x^4-1$ (2

**الأجوبة:** (1 $f'(x)=\left(2x^8\right)'=2\times\left(x^8\right)'=2\times8x^{8-1}=16x^7$ (2 $f'(x)=\left(5x^4-1\right)'=5\times\left(x^4\right)'-(1)'=5\times4x^{4-1}-0=20x^3$

**تمرين2:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=3x^7$ (1 $\quad f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2-1$ (2 $\quad f(x)=3x^3-4x^2+6$ (3 $\quad f(x)=2x^5-3x^4-6x+1$ (4

**تمرين3:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=3x^3-\dfrac{1}{2}x^2-1$ (1 $\quad f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{4}x^4-4x-6$ (2 $\quad f(x)=2x^5-4x^2+7$ (3

**مثال2:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ : $f(x)=(3x+5)\times(2x+6)$

**الحل:** $f'(x)=\left((3x+5)\times(2x+6)\right)'=\left((3x+5)\right)'\times(2x+6)+(3x+5)\times(2x+6)'$

$f'(x)=\left((3x+5)\times(2x+6)\right)'=3\times(2x+6)+(3x+5)\times2$

$f'(x)=6x+18+6x+10=12x+28$

**تمرين4 :** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ : $f(x)=x^2\times(2x-1)$

**الحل:** $f'(x)=\left(x^2\times(2x-1)\right)'=\left(x^2\right)'\times(2x-1)+x^2\times(2x-1)'$

$f'(x)=2x\times(2x-1)+x^2\times2=4x^2-2x+2x^2=6x^2-2x$

**مثال3:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ : $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$

**الحل:** $f'(x)=\left(\dfrac{1}{2x+1}\right)'=-\dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\dfrac{2}{(2x+1)^2}$

**تمرين5:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ : $f(x)=\dfrac{1}{4x-3}$

**الحل:** $f'(x)=\left(\dfrac{1}{4x-3}\right)'=-\dfrac{(4x-3)'}{(4x-3)^2}=-\dfrac{4}{(4x-3)^2}$

**مثال4:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$

**الحل:** ( $f'(x)=\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)'=\dfrac{(2x+3)'\times(x+1)-(2x+3)\times(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=\dfrac{2\times(x+1)-(2x+3)\times1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$$

**تمرين6:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ : $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+5}$

**الحل:** ( $f'(x)=\left(\dfrac{3x-1}{2x+5}\right)'=\dfrac{(3x-1)'\times(2x+5)-(3x-1)\times(2x+5)'}{(2x+5)^2}$

$$f'(x)=\dfrac{3\times(2x+5)-(3x-1)\times2}{(2x+5)^2}=\dfrac{6x+15-6x+2}{(2x+5)^2}=\dfrac{17}{(2x+5)^2}$$

**مثال5:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ : $f(x)=(4x+3)^3$

**الحل:** $f'(x)=\left((4x+3)^3\right)'=3(4x+3)^2\times(4x+3)'=3(4x+3)^2\times4=12(4x+3)^2$

**تمرين 7:** (1 $f(x)=3x^3-\dfrac{1}{2}x^2-1$ (2 $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{4}x^4-4x-6$

(3 $f(x)=x^2\times(2x-1)$ (4 $f(x)=\dfrac{1}{5x-4}$ (5 $f(x)=\dfrac{4x-2}{2x+1}$

(6 $f(x)=(2x-1)^7$

**الحل:** (1 $f'(x)=\left(3x^3-\dfrac{1}{2}x^2-1\right)'=9x^2-x$ (2 $f(x)=x^4-x^3-4$ (3 $f'(x)=\left(x^2\times(2x-1)\right)'=\left(x^2\right)'\times(2x-1)+x^2\times(2x-1)'$

$$f'(x)=2x\times(2x-1)+x^2\times2=4x^2-2x+2x^2=6x^2-2x$$

(4 $f'(x)=\left(\dfrac{1}{5x-4}\right)'=-\dfrac{(5x-4)'}{(5x-4)^2}=-\dfrac{5}{(5x-4)^2}$ (5 $f'(x)=\left(\dfrac{4x-2}{2x+1}\right)'=\dfrac{(4x-2)'\times(2x+1)-(4x-2)\times(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$$f'(x)=\dfrac{4\times(2x+1)-(4x-2)\times2}{(2x+1)^2}=\dfrac{(8x+4)-(8x-4)}{(2x+1)^2}=\dfrac{8}{(2x+1)^2}$$

(6 $f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7(2x-1)^6\times(2x-1)'=7(2x-1)^6\times2=14(2x-1)^6$

## III. رتابة دالة و إشارة مشتقتها:

**خاصية:** $I$ مجال من $\mathbb{R}$ و $f$ دالة قابلة للاشتقاق على $I$.

- $f$ ثابتة على $I$ $\Leftrightarrow f'(x)=0$ لكل $x$ من $I$.
- $f$ تزايدية على $I$ $\Leftrightarrow f'(x)\geq0$ لكل $x$ من $I$.
- $f$ تناقصية على $I$ $\Leftrightarrow f'(x)\leq0$ لكل $x$ من $I$.

**مثال1 :** لتكن $f$ دالة عددية معرفة ب: $f(x)=5x^3$

1. حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$
2. أحسب الدالة المشتقة و استنتج رتابة الدالة $f$

**الحل:**

1)الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$ (2 $f'(x)=\left(5x^3\right)'=5\left(x^3\right)'=5\times3x^2=15x^2\geq0$ ومنه الدالة $f$ تزايدية على $D_f=\mathbb{R}$

**مثال 2 : دراسة دالة حدودية:**

$f$ دالة عددية معرفة ب: $f(x)=x^3-3x^2+4$

1. حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$
2. أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
3. أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$.
4. أنشئ منحنى الدالة $f$.

**الحل:**

1. الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

.3 $f'(x)=\left(x^3-3x^2+4\right)'=\left(x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+\left(4\right)'$

$f'(x)=3x^2-3\times 2x^1+0=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0$

$\Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

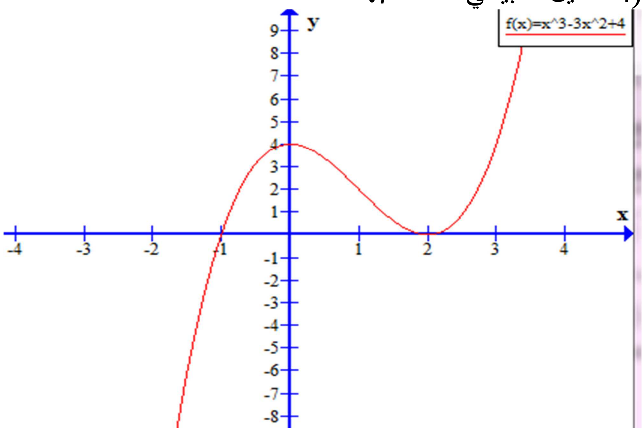
**جدول إشارة** $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $3x(x-2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

جدول تغيرات الدالة $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

4)التمثيل المبياني للدالة $f$.




**تمرين8 : <u>دراسة دالة حدودية:</u>**

$f$ دالة عددية معرفة ب: $f(x)=x^3+3x^2-1$

1. حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$
2. أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$.
4. أنشئ منحنى الدالة $f$.

**<u>الحل:</u>**

1. الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

.3 $f'(x)=\left(x^3+3x^2-1\right)'=\left(x^3\right)'+\left(3x^2\right)'-\left(1\right)'$

$f'(x)=3x^2+3\times 2x^1+0=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x+2)=0$

$\Leftrightarrow 3x=0$ أو $x+2=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=-2$

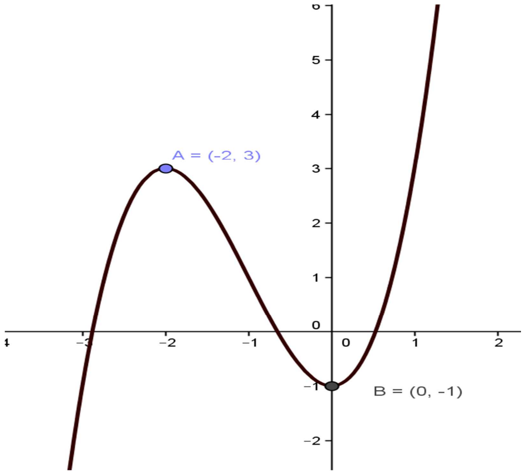
**جدول إشارة** $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $3x$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $3x(x+2)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

جدول تغيرات الدالة $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

التمثيل المبياني للدالة $f$.




**مثال 3 : دراسة دالة متخاطة:** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة ب: $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة $g$.
2. أحسب نهايات الدالة $g$ في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة $g$.
4. املأ الجدول التالي :

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | | | | | | |

5. أنشئ منحنى الدالة $g$.

**الحل:**

1. حيز تعريف الدالة $g$ هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{1\}$

و منه $D=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2. $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$.

$\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim_{x\to1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=+\infty$ و $\lim_{x\to1^-} g(x)=\lim_{x\to1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}=-\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى.

3. لكل $x$ من $D$ لدينا: $g'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\; g'(x)<0$

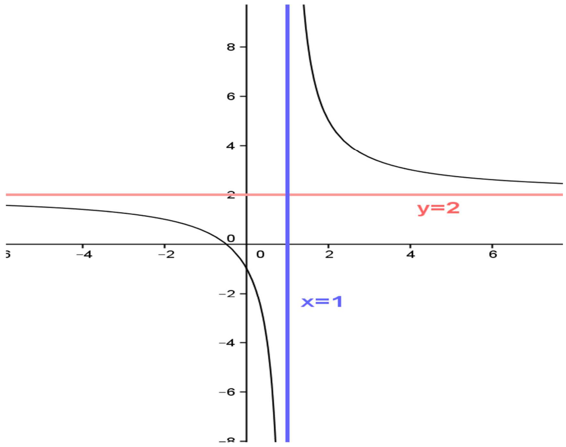
جدول تغيرات الدالة.

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | ‖ | $-$ |
| $f(x)$ | $2 \searrow$ | ‖ | $\searrow 2$ |

.4

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 1 | 1/2 | -1 | | 5 | 7/2 | 3 |

.5 منحنى الدالة $g$ .




**تمرين9 :** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$

.1 حدد حيز تعريف الدالة $f$.

.2 أحسب نهايات الدالة $f$ في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.

.3 أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$.

.4 املأ الجدول التالي :

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

.5 أنشئ منحنى الدالة $f$.

**الحل:**

.1 حيز تعريف الدالة $f$ هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x-2\neq 0\}=\mathbb{R}-\{2\}$

و منه $D=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{x}=3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x}=3$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=3$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$.

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x+1}{x-2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x+1}{x-2}=-\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى.

.3 لكل $x$ من $D$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{(x-2)^2}=\dfrac{-7}{(x-2)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)f'(x)<0$

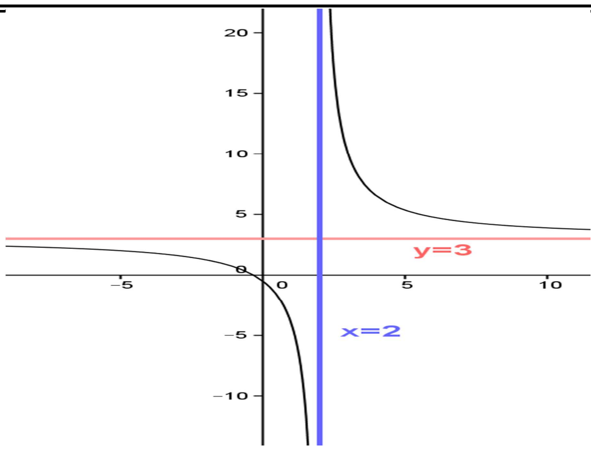
<u>جدول تغيرات الدالة</u>

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | ‖ | $-$ |
| $f(x)$ | $3 \searrow$ | ‖ | $\searrow 3$ |

.4

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 /3 | -1/2 | -4 | | 10 | 13/2 | 4 |

.5 منحنى الدالة $f$.




**IV. دراسة الدالة $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ $(a \neq 0)$:**

**مثال:** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{3x-5}$

1. حدد $D$ حيز تعريف الدالة $f$.
2. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة $f$.
4. أحسب $f(2)$ و $f(3)$ و $f(7)$.
5. مثل مبيانيا الدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم.

**الحل:**

1. $f(x)$ **معرفة إذا وفقط إذا كان** $3x-5 \geq 0$ **يعني** $3x \geq 5$ **و منه** $x \geq \dfrac{5}{3}$

**يعني حيز تعريف الدالة $f$ هو:** $D=\left[\dfrac{5}{3},+\infty\right[$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}=\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\sqrt{3-\dfrac{5}{x}}=+\infty$

**لأن** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x}=0$ **و** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}=+\infty$

3. **لدينا:** $\left(\forall x \in \left]\dfrac{5}{3},+\infty\right[\right) f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-5}}$

**بما أن** $\dfrac{3}{2}>0$ **و** $\sqrt{3x-5}>0$ **فإن:** $f'(x)>0$.

**جدول التغيرات:**

| $x$ | $5/3$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0 \nearrow +\infty$ |

4. **لدينا:** $f(2)=\sqrt{3\times2-5}=\sqrt{1}=1$

و $f(3)=\sqrt{3\times3-5}=\sqrt{4}=2$

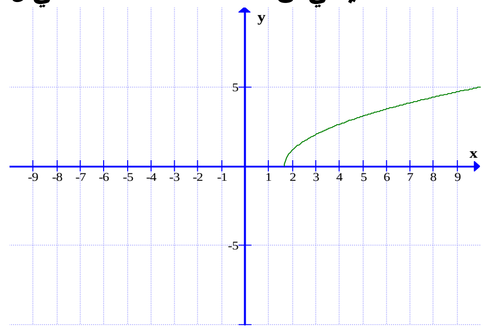
و $f(7)=\sqrt{3\times7-5}=\sqrt{16}=4$

5. **التمثيل المبياني:**

$f\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$ **يعني أن النقطة** $A\left(\dfrac{5}{3},0\right)$ **تنتمي ل** $(C_f)$.

$f(2)=1$ **يعني أن النقطة** $B(2,1)$ **تنتمي ل** $(C_f)$.

$f(3)=2$ يعني أن النقطة $B(3,2)$ تنتمي ل $(C_f)$.
$f(7)=4$ يعني أن النقطة $B(7,4)$ تنتمي ل $(C_f)$.



**تمرين10:** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{2x+4}$

1. حدد $D$ حيز تعريف الدالة $f$.
2. أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة $f$.
4. أحسب $f(-2)$ و $f(0)$ و $f(6)$.
5. مثل مبيانيا الدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم.

**الحل:1)** $f(x)$ **معرفة إذا وفقط إذا كان** $2x+4\geq 0$ **يعني** $2x\geq -4$ **و منه** $x\geq -2$

**يعني حيز تعريف الدالة** $f$ **هو:** $D=[-2,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sqrt{2+\frac{4}{x}}=+\infty$$

**لأن** $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ **و** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

**لدينا:** $(\forall x\in]-2,+\infty[)\, f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+4}}=\frac{1}{\sqrt{2x+4}}$

**بما أن** $\sqrt{2x+4}>0$ **فان:** $f'(x)>0$.

**جدول التغيرات:**

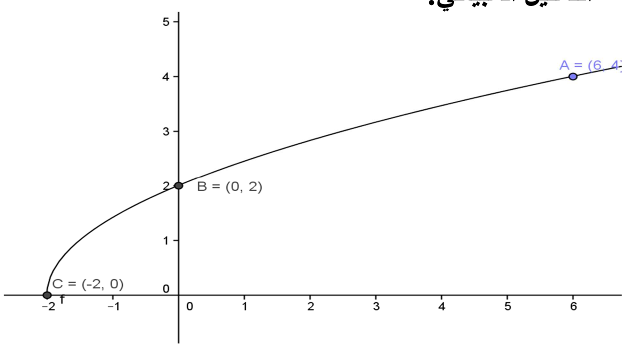
| $x$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

**لدينا:** $f(-2)=\sqrt{2\times(-2)+4}=\sqrt{0}=0$

و $f(0)=\sqrt{2\times 0+4}=\sqrt{4}=2$

و $f(6)=\sqrt{2\times 6+4}=\sqrt{16}=4$

**التمثيل المبياني:**



**تمرين11:** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة ب: $g(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة $g$ .
2. أحسب نهايات الدالة $g$ في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدلة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة $g$ .
4. أنشئ منحنى الدالة $g$ .

**الحل:**

1)حيز تعريف الدالة $g$ هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$

و منه $D=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$.

$\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+1}{x+1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x+1}{x+1}=+\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى.

3)لكل $x$ من $D$ لدينا: $g'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ يعني: $(\forall x\in D)\, g'(x)>0$

4)<u>جدول تغيرات الدالة.</u>

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | \|\| | $+$ |
| $f(x)$ | $2$ | | \|\| | $2$ |

منحنى الدالة $g$ .