أكاديمية الجهة الشرقية

الدرس السابع :

الاشتقاق

الأستاذ: نجيب عثماني

مستوى:السنة الأولى من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ العدد المشتق لدالة في نقطة x_0؛ التأويل الهندسي للعدد المشتق؛ المستقيم المماس لمنحنى في نقطة؛ ـ المعادلة الديكارتية للمستقيم المماس؛ ـ الاشتقاق على مجال؛ الدالة المشتقة؛ ـ اشتقاق الدوال: $x \to a$ و $x \to ax$ و $x \to x^n$؛ ـ اشتقاق الدوال $f+g$، λf، fg، $\frac{1}{f}$، $\frac{f}{g}$، f^n $(n \in IN^*)$؛ ـ رتابة دالة وإشارة مشتقتها؛ مطاريف دالة قابلة للاشتقاق على مجال.	ـ التعرف على أن العدد المشتق لدالة في x_0 هو المعامل الموجه لمماس منحنى الدالة في النقطة التي أفصولها x_0؛ ـ اشتقاق الدوال الحدودية والدوال الجذرية. ـ تحديد معادلة المماس لمنحنى دالة في نقطة وإنشاؤه؛ ـ تحديد رتابة دالة انطلاقا من دراسة إشارة مشتقتها؛ ـ حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقيم القصوية؛ ـ تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني؛	ـ تقبل المبرهنتان المتعلقتان بالرتابة وإشارة المشتقة والعمليات على الدوال المشتقة.

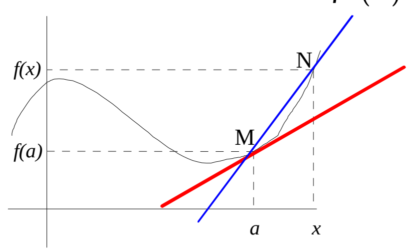
I. قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة

1. العدد المشتق

تعريف : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$

l يسمى العدد المشتق للدالة في النقطة a و نرمز له بالرمز : $f'(a)$



ونكتب : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0=1$

الجواب : $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5(x^2-1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5(x^2-1^2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}5(x+1)=5\times 2=10$$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=10=f'(1)$ و هو العدد المشتق عند $x_0=1$

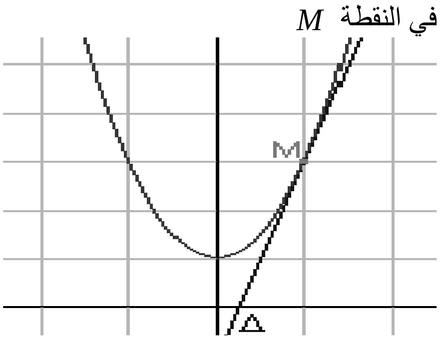
تمرين: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0=3$

2. التأويل الهندسي للعدد المشتق-معادلة مماس لمنحنى دالة في نقطة

تعريف : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

المستقيم (Δ) المار من النقطة $M(a;f(a))$ و الذي معامله الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى (C_f) في النقطة M



خاصية : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a. معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة $M(a;f(a))$ هي :

$$(\Delta) \ : \ y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=3x^2$

حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

الجواب: (1 $f(2)=2^2-2\times2+1=1$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x-2}$$

$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x=2$ ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

$f'(2)=2$ و هو العدد المشتق عند $x_0=2$

(2 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=f(2)+f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=1+2(x-2)\Leftrightarrow y=2x-3$

II. الدالة المشتقة لدالة عددية

1. الاشتقاق على مجال

تعريف1: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I

2. الدالة المشتقة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I

الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $f'(x)$ المعرفة كما يلي :

$$f' : I\to\mathbb{R}$$
$$x\to f'(x)$$

III. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال المشتقة

مثال1: $f(x)=2$ **مثال2:** $f(x)=3x-5$

مثال3: $f(x)=x^{10}$ **مثال4:** $f(x)=2x^5$

مثال5: $f(x)=3x^3+\frac{1}{2}x^2+1$

مثال6: $f(x)=3x^2-6x-1$

مثال7: $f(x)=x^2\times\sqrt{x}$

مثال8: $f(x)=(3x-5)\times(2x+1)$

مثال9: $f(x)=\frac{1}{5x-4}$

مثال10: $f(x)=\frac{4x-2}{2x-1}$

مثال11: $f(x)=(2x-1)^7$

الدالة f	الدالة المشتقة f'
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$ $\quad n\in\mathbb{Z}^*$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=u+v$	$f'(x)=u'+v'$
$f(x)=u-v$	$f'(x)=u'-v'$
$f(x)=k.u$	$f'(x)=k.u'$
$f(x)=u\times v$	$f'(x)=u'\times v+u\times v'$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=nu^n\times u'$
$f(x)=\frac{1}{u}$	$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$
$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

تمرين: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1 $f(x)=2$ (2 $f(x)=3x-5$ (3 $f(x)=x^{10}$

(4 $f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ (5 $f(x)=\frac{5}{x}$ (6 $f(x)=6\sqrt{x}-4$

(7 $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ (8 $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ (9 $f(x)=(3x+4)^3$ (10 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

أجوبة : (1 $f'(x)=(2)'=0$ (2 $f'(x)=(3x-5)'=3$

(3 $f'(x)=(x^{10})'=10x^{10-1}=10x^9$

(4 $f'(x)=\left(4x^3-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=4\times3x^{3-1}-\frac{1}{2}\times2x-0=12x^2-x$

(5 $f'(x)=\left(\frac{5}{x}\right)'=\left(5\times\frac{1}{x}\right)'=5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-5}{x^2}$

(6 $f'(x)=\left(6\sqrt{x}-4\right)'=6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{x}$

(7 نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$$

(8 $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

9) $f(x)=(3x+4)^3$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$$

تمرين3: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=11$ 2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=2x^3$

4) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 5) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

6) $f(x)=\frac{3}{x}$ 7) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 8) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ 10) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

11) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 12) $f(x)=(2x-1)^7$

أجوبة : 1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=(2x^3)'=2\times3x^{3-1}=6x^2$

4) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6\right)'=\frac{1}{5}\times5x^{5-1}-\frac{1}{4}\times4x^3-4+0=x^4-x^3-4$

6) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

7) $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

8) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{5x+7}\right)'=-\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2}=-\frac{5}{(5x+7)^2}$$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ نستعمل القاعدة التالية : $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

10) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$$

11) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

12) $f(x)=(2x-1)^7$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7\times(2x-1)^{7-1}\times(2x-1)'=14(2x-1)^6$$

تطبيقات الدالة المشتقة:

1. رتابة دالة وإشارة مشتقاتها

خاصية1

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f تزايدية على مجال I فان $f'(x)\geq0$ $\forall x\in I$
- إذا كانت f تناقصية على مجال I فان $f'(x)\leq0$ $\forall x\in I$
- إذا كانت f ثابتة على مجال I فان $f'(x)=0$ $\forall x\in I$

خاصية2

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f' موجبة قطعا على المجال I فان f تزايدية قطعا على مجال I
- إذا كانت f' سالبة قطعا على المجال I فان f تناقصية قطعا على مجال I
- إذا كانت f' منعدمة على المجال I فان f ثابتة على مجال I

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2+2x-2$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أدرس تغيرات 4) حدد جدول تغيرات f

الجواب:1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2+2x-2=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2+2x-2=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=(x^2+2x-2)'=2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $2x+2=0$ يعني $x=-1$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$	

اذا كانت: $x\in[-1;+\infty[$ فان : $f'(x)\geq0$ ومنه f تزايدية

اذا كانت: $x\in]-\infty;-1]$ فان : $f'(x)\leq0$ ومنه f تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2. مطارف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية1: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصر من I

- إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a وتقبل مطرا فا في النقطة a فان $f'(a)=0$

خاصية 2:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصر من I

إذا كانت f تنعدم في النقطة a تتغير إشارتها فان $f(a)$ مطراف للدالة f

مثال: حدد مطاريف الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2-6x+1$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=(x^2-6x+1)'=2x-6$

$f'(x)=0$ يعني $2x-6=0$ يعني $x=3$

ندرس اشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

f' تنعدم في 3 و تتغير إشارتها اذن $f(3)=-8$ مطرا ف للدالة f

وبالضبط قيمة دنيا للدالة f

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2+x+1$

أو $f(x)=-x^2+2x+3$ أو $f(x)=-x^2+x$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات f

5) حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=1$

6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

7) حدد مطاريف الدالة f ان وجدت

8) أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم

الجواب: $f(x)=2x^2+x+1$

1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2+x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=(2x^2+x+1)'=4x+1$

$f'(x)=0$ يعني $4x+1=0$ يعني $x=-\frac{1}{4}$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$	

4) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=5x-21 \Leftrightarrow y=4+5(x-5) \Leftrightarrow y=f(1)+f'(1)(x-1)$

لأن : $f(1)=4$ و $f'(1)=5$

6) أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $2x^2+x+1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=1$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times2=-7<0$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتلي التمثيل المبياني لا يقطع محور الأفاصيل

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

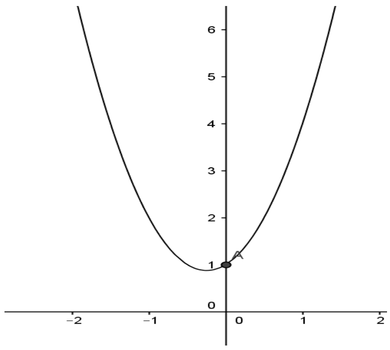
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=1$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A(0;1)$

7)الدالة تقبل قيمة دنيا هي : $\frac{7}{8}$

8)رسم: C_f

2-	-1	-1/4	0	1	2
7	2	7/8	1	4	11



ملاحظة : بالنسبة ل $f(x)=-x^2+2x+3$ وتحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني

$-x^2+2x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=2$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times3\times(-1)=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(2)+\sqrt{16}}{-2}=-1$ **و** $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1;0)$ أو $B(3;0)$