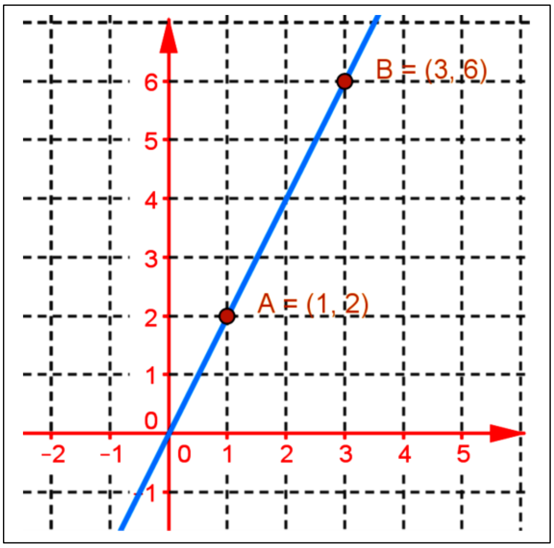
درس : الاشتقاق

I. تذكير :

1. المعامل الموجه و متجهة موجهة لمستقيم



لنعتبر المستقيم (AB) المار من $A(1,2)$ و $B(3,6)$

- المعامل الموجه هو $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{6-2}{3-1}=2$
- متجهة موجهة هي $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.
- معادلة ديكارتية ل (AB) هي على شكل : $(AB): y=m(x-x_A)+y_A$

وكذلك : $(AB): y=m(x-x_B)+y_B$

ومنه معادلة ديكارتية ل (AB) هي : $(AB): y=2(x-1)+2=2x$

أو أيضا : $(AB): y=2(x-3)+6=2x$

2. السرعة المتوسطة :

- عندما تكون المسافة d التي يقطعها جسم متحرك معبر عنها بدلالة الزمن t .

لدينا : المسافة d التي قطعها هذا الجسم في اللحظة t هي : $d(t)=f(t)$.

- السرعة المتوسطة :

السرعة المتوسطة هي سرعة هذا الجسم بين اللحظة t_1 و اللحظة t_2 هي $V_m[t_1,t_2]=\dfrac{\Delta_d}{\Delta_t}=\dfrac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}=\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$

أي معدل تغيرات الدالة d أو الدالة f بين t_1 و t_2 .

- مثال :

نفترض أن المسافة التي يقطعها جسم متحرك معبر عنها بدلالة الزمن t هي معطاة بالدالة $d(t)=f(t)=10t^2$ حيث d معبر عنها ب km و t ب h (بالساعة) .

نحسب السرعة المتوسطة للجسم المتحرك بين $t_1=1h$ و $t_1=2h$.

لدينا : $V_m[t_1,t_2]=V_m[1,2]=\dfrac{\Delta_d}{\Delta_t}=\dfrac{d(2)-d(1)}{2-1}=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{40-10}{1}=30\ km/h$.

ملحوظة :

الفزيائيون :

- يعبر عن تغيرات ب Δ .

مثال تغيرات بين الأفصولين x_1 و x_2 ب : $\Delta x=x_2-x_1$. تغيرات بين الأرتوبين $y_1=f(x_1)$ و $y_2=f(x_2)$ ب: $\Delta y=y_2-y_1$

- يعبر عن تغيرات جد صغيرة ب d

مثال : نعتبر $x_2=x_1+h$ إذن $\Delta x=h$ و نعتبر h تؤول إلى 0. في هذه الحالة نكتب dx بدلا من Δx

3. تمهيد :

أ- التمهيد الأول :

- قطع عداء مسافة 5 كلم في ظرف 10 دقائق .ماذا يمثل المقدار $30\ km/h$ بالنسبة لهذا العداء ؟
- 30 دقيقة كانت كافية لملء صهريج حجمه $3\ m^3$. ماذا يمثل المقدار $100\ \ell/min$ ؟.
- قطعت سيارة مسافة $200\ km$ في ظرف ساعتين . ماذا يمثل المقدار $100\ km/h$ ؟
- رصاصة صيد قطعة مسافة $300\ m$ في ظرف $8.10^{-4}\ s$. ماذا يمثل المقدار $375\ m/s$ ؟

ب- التمهيد الثاني :

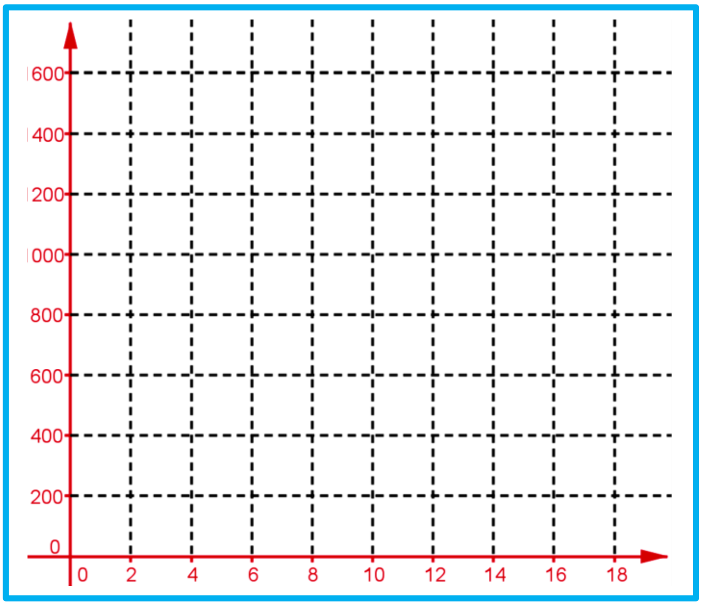
- بعد مرور 10 ثواني من انطلاق السباق كانت سرعة العداء $35\ km/h$. ماذا يمثل المقدار $35\ km/h$ بالنسبة للعداء؟
- بعد مرور $20\ s$ من بدء ملء الصهريج كان صبيب الماء هو : $80\ \ell/min$.
- أثناء اصطدام سيارة بشجرة كانت السرعة $120\ km/h$. ماذا يمثل المقدار $120\ km/h$ بالنسبة للسيارة ؟
- السرعة البدئية لانطلاق رصاصة صيد كانت $600\ m/s$. ماذا يمثل المقدار $600\ m/s$ بالنسبة للرصاصة ؟
- أثناء إصابة الإوزة بالرصاصة كانت السرعة $300\ m/s$. ماذا يمثل المقدار $300\ m/s$ بالنسبة للرصاصة ؟

II. اشتقاق دالة في نقطة $A(x_0,f(x_0))$ أو أيضا النقطة التي أفصولها x_0 (نقول باختصار النقطة x_0) :

A. اشتقاق دالة في نقطة x_0 :

1. نشاط :

سيارة سباق تصل سرعتها $360\ km/h$ خلال $10\ s$ نفترض أن التسارع $(l'accélération)$ ثابتة ؛ وهذا يطبق على السائق دافعة أفقية تساوي وزنه ؛ حيث حركة سيارته متغيرة بانتظام ومحددة بالدالة الزمنية $d_t=f(t)=5t^2$ ؛ (حيث t هي المدة الزمنية بالثانية $d_t=f(t)$ المسافة التي قطعتها السيارة بالمتر بعد مرور t ثانية) .



الهدف هو حساب سرعة المتسابق بعد $3\ s$.

1. ماهي المسافة التي قطعتها سيارة المتسابق بعد $10\ s$؟
2. مثل مبيانيا d_t بدلالة t.
3.
   - أ- أعط الصيغة التي تعطي السرعة المتوسطة $V_m[3,3+h]$ لسيارة المتسابق بين اللحظتين 3 و $3+h$:
   - ب- أحسب السرعة المتوسطة من أجل h في الجدول التالي $(en\ m/s)$.

h	1	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
$V_m(3,3+h)$	....	....	....	....	....

4. من خلال الجدول ماهي القيمة التي يأخذها V_m عندما h يصبح صغيرا جدا ؟ ثم عبر عن ذلك باستعمال الرموز .
5. ماذا تمثل هذه الكمية في الفيزياء ؟
6. أ- بصفة عامة نأخذ x_0 بدلا من 3 ؛ أعط الكتابة لهذه الكمية .ب- نضع : $x=2+h$ اكتب النهاية السابقة باستعمال المتغير x .

2. مفردات:

العدد $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\ell$ (أو أيضا العدد $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\ell$) يسمى السرعة اللحظية للجسم في اللحظة $t=3$ ويسمى **العدد المشتق للدالة f** في النقطة $t=3$ و يرمز له ب $\ell=f\ '(3)$ أو أيضا $\ell=\frac{df}{dx}(3)$. نكتب $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f\ '(3)$ (أو أيضا $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f\ '(3)$)

3. بصفة عامة:

نأخذ x_0 بدل 2 نحصل على : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$. مع $f'(x_0)$ عدد حقيقي .

نضع $x=x_0+h$ نحصل على $x\to x_0$ بدل $h\to 0$ ومنه : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

إذا كانت النهاية منتهية نقول إن : الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0.

أعط تعريف : للدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 .

4. تعريف :

f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I يحتوي على x_0.(أو $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$)

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ حيث : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$.

ℓ يسمى العدد المشتق ل f في x_0 و نرمز له ب $f'(x_0)$.

نكتب $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell=f'(x_0)$ أو أيضا $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell=f'(x_0)$.

5. ملحوظة :

- السرعة اللحظية في اللحظة t_1 هي $V(t_1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{d(t_1+h)-d(t_1)}{(t_1+h)-t_1}=f'(t_1)$ (بشرط أن تكون النهاية منتهية)

أو أيضا : العدد المشتق في t_1 للدالة d (الدالة f).أو أيضا : $V(t_1)=d'(t_1)=f'(t_1)$.

- مثال :

نفترض أن المسافة التي يقطعها جسم متحرك معبر عنها بدلالة الزمن t هي $d(t)=f(t)=10t^2$ حيث d معبر عنها ب km و t ب h (بالساعة) .

نحسب السرعة اللحظية للجسم المتحرك في $t_1=1h$.

الطريقة 1 :

لدينا :

$$\lim_{h\to 0}V_m[t_1,t_1+h]=\lim_{h\to 0}V_m[1,1+h]=\lim_{h\to 0}\frac{d(1+h)-d(1)}{(1+h)-1}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{10(1+h)^2-10}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10h^2+20h}{h}=\lim_{h\to 0}10h+20=20$$

خلاصة : السرعة اللحظية في اللحظة $t_1=1h$ هي $V(t_1)=20\ {km}/{h}$.

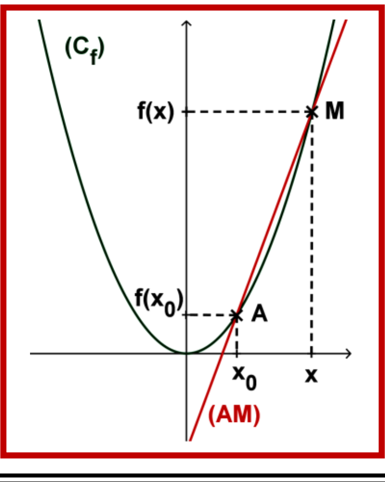
الطريقة 2 :

لدينا : $d(t)=f(t)=10t^2$ ومنه السرعة اللحظية في اللحظة $t_1=1h$ هي :

$$V(t_1)=d'(t_1)=f'(t_1)=(10t^2)'_{(t=1)}=(20t)_{(t=1)}=20\times 1=20$$

B. التأويل الهندسي للعدد المشتق –مماس لمنحنى دالة في نقطة :

1. نشاط :



$A\begin{pmatrix}x_0\\f(x_0)\end{pmatrix}$ و $M\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}$ أي A , M من المنحنى (C_f). f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0.

درس : الاشتقاق

1) أعط المعامل الموجه ل (AM) و متجهة موجهة ل (AM) .

2) عندما x تؤول إلى x_0.ما هو الوضع الذي يأخذه المستقيم (AM) ؟ وحدد معامله الموجه.

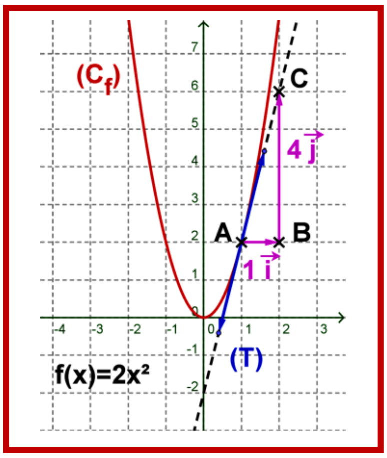
3) أعط المعادلة المختزلة للمماس (T) ثم استنتج المعادلة الديكارتية للمماس (T).

2. خاصية:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و (C_f) منحنى f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- العدد المشتق $f'(x_0)$ هو المعامل الموجه للمستقيم (T) المماس لمنحنى الدالة f في النقطة $A\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ (أي النقطة x_0)
- معادلة المماس ل (C_f) في $A\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ هي : $(T): y=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$

3. مثال :



أوجد معادلة المماس (T) ل (C_f) في النقطة $x_0=1$ مع $f(x)=2x^2$.

المعادلة هي $(T): y=(x-1)f'(1)+f(1)$ أي $(T): y=(x-1)\times 4+2$

إذن المعامل الموجه هو $m=4$ و متجهة موجهة له هي : $\vec{u}(1,4)=1\vec{i}+4\vec{j}$.

انطلاقا من $A(1,f(1))$ مع $f(1)=2$

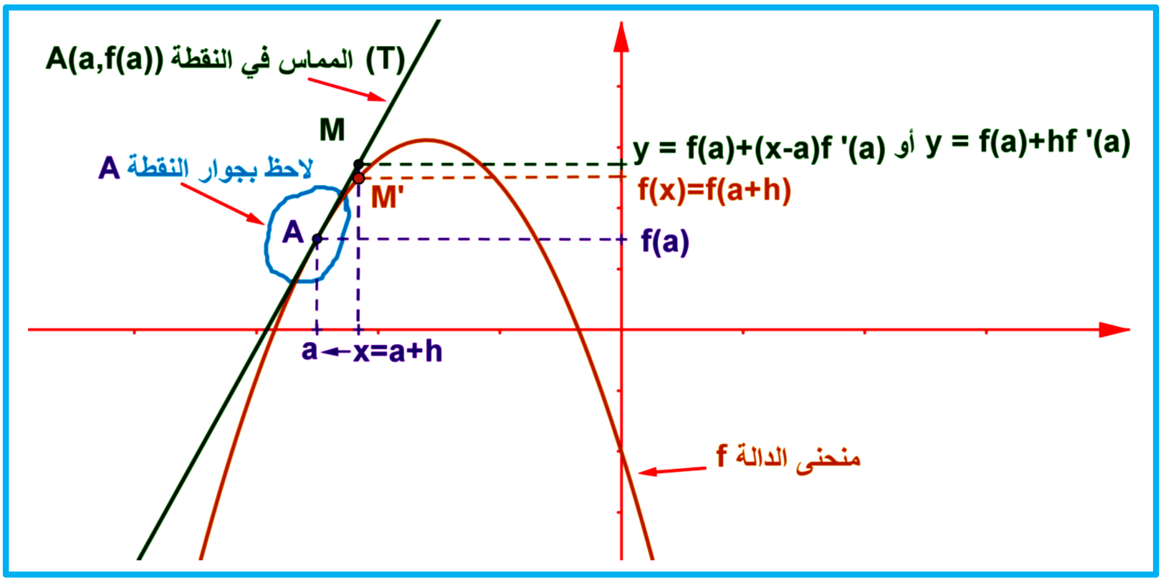
- ننشئ النقطة B حيث : $\overrightarrow{AB}=1\vec{i}$. ننشئ النقطة C حيث: $\overrightarrow{BC}=4\vec{j}$.
- ومنه المستقيم (AC) هو المماس (T) ل (C_f) في A .
- لرسم المماس يكفي إن نرسم قطعة منتصفها A و في كل طرف نضع سهم .

C. تقريب دالة قابلة للاشتقاق في نقطة بدالة تآلفية . (أو التقريب الرقمي interprétation numérique)

1. ملحوظة :

تقريب تآلفي لدالة f عند النقطة a هو إيجاد دالة تآلفية $g(x)=mx+p$ تكون بالتقريب تساوي الدالة $f(x)$ بجوار النقطة $A(a,f(a))$

أو أيضا : $f(x)\approx mx+p$.نعلم أنه بجوار $A(a,f(a))$ المنحنى (C_f) و المماس (T) للمنحنى في هذه النقطة يتقاربان جدا.



- نعتبر النقطة $M(x,f(x))$ من (C_f) منحنى الدالة f ؛ ثم النقطة $M'(x,y)$ من المماس (T) للمنحنى الدالة f في النقطة a .

نلاحظ : في النقطة $A(a,f(a))$ منحنى الدالة f يقترب من المماس (T) للمنحنى الدالة f .

- عندما x تقترب من a . (أي نضع $x=a+h$ مع $h\to 0$) و في هذه الحالة فإن النقطة M تقترب من النقطة M' ومنه الأرتوبين ل M و M' يقتربان من نفس القيمة ومنه : $f(a+h)\approx y$ أي : $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$

2. تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في a من I .

- الدالة u : $u:x\to f(a)+(x-a)f'(a)$ (أو الدالة $v:h\to f(a)+hf'(a)$; $(x-a=h)$) تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة a.
- عندما x تقترب جدا من a العدد $f(a)+(x-a)f'(a)$ هو تقريب تآلفي ل $f(x)$ بجوار a و نكتب :
$f(x)\approx f(a)+(x-a)f'(a)$
- أو أيضا العدد $f(a)+hf'(a)$ هو تقريب تآلفي ل $f(a+h)$ بجوار الصفر و نكتب $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$. (مع $x-a=h$)

3. أمثلة :

أ- مثال 1 :

أوجد تقريب تآلفي للعدد $f(1+h)$ مع $f(x)=x^2$ و $a=1$

f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة 1 مع $f'(1)=2$ التقريب التآلفي للعدد $f(1+h)$ هو $f(1+h)\approx hf'(1)+f(1)\approx 2h+1$

خلاصة : $f(1+h)=(1+h)^2\approx 2h+1$

- **تطبيق للنتيجة :**
  - نأخذ $h=0,001$ $f(1,001)=f(1+0,001)\approx 2\times 0,001+1$ ومنه : $f(1+0,001)\approx 1,002$.
  - نتحقق : $f(1,001)=(1,001)^2=1,002001$ إذن : $1,002\approx 1,002001$.
  - **تقنية حساب :** $(1+h)^2$ مع h قريبا جدا من 0 نحسب $2h+1$.

ب- مثال 2 :

أوجد تقريب تآلفي للعدد $\sqrt{9,002}$.

نضع $f(x)=\sqrt{x}$ و $a=9$ و $h=0,002$ ومنه : $\sqrt{9,002}=f(9+0,002)$

1. نحسب العدد المشتق ل f في 9 .

لدينا : $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(9+h)-f(9)}{h}=\lim\limits_{x\to9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}=\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim\limits_{x\to9}\frac{\cancel{\sqrt{x}-3}}{\cancel{(\sqrt{x}-3)}(\sqrt{x}+3)}=\lim\limits_{x\to9}\frac{\cancel{1}}{(\sqrt{x}+3)}=\frac{1}{6}\in\mathbb{R}$

إذن قابلة للاشتقاق في 9 و العدد المشتق في 9 هو $f'(9)=\frac{1}{6}$.

2. نجد تقريب تآلفي للعدد $\sqrt{9,002}$.

لدينا : $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$

ومنه : $f(9+0,002)\approx f(9)+0,002\times f'(9)$ ومنه : $f(9+0,002)\approx\sqrt{9}+0,002\times\frac{1}{6}$

إذن : $f(9+0,002)\approx 3,000333333$

نلاحظ : $\sqrt{9,002}\approx 3,000333333$ أم الآلة الحاسبة تعطي لنا : $\sqrt{9,002}\approx 3,000333315$ إذن الدقة ل 3×10^{-8}

4. ملحوظة :

- بالنسبة للدالة : $f(x)=x^2$ و $a=1$ لدينا : $f(1+h)=(1+h)^2\approx 1+2h$.
- بالنسبة للدالة : $f(x)=x^3$ و $a=1$ لدينا : $f(1+h)=(1+h)^3\approx 1+3h$.
- بالنسبة للدالة : $f(x)=\sqrt{x}$ و $a=1$ لدينا : $f(1+h)=\sqrt{1+h}\approx 1+\frac{h}{2}$.
- بالنسبة للدالة : $f(x)=\frac{1}{x}$ و $a=1$ لدينا : $f(1+h)=\frac{1}{1+h}\approx 1-h$.

III. الاشتقاق على اليمين – الاشتقاق على اليسار .

A. العدد المشتق على اليمين – على اليسار :

1. نشاط :

f دالة عددية معرفة ب: $\begin{cases} f(x)=2x+1 & ;x\geq 1 \\ f(x)=3x^2 & ;x<1 \end{cases}$. أحسب ما يلي : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

1. مفردات :

نقول إن f قابلة للاشتقاق على يمين 1 و العدد المشتق على اليمين هو: $f'_d(1)=2$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على يسار 1 و العدد المشتق على اليسار هو: $f'_g(1)=6$. ومنه f غير قابلة للاشتقاق في 1.

1) أعط تعريف للاشتقاق على اليمين ثم على اليسار في النقطة x_0.

2) أعط الخاصية التي تربط الاشتقاق و الاشتقاق على اليمين و على الاشتقاق اليسار.

2. تعريف:

- f دالة عددية معرفة على $I_d=[x_0;x_0+\alpha[$. (أي على يمين x_0)

  نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 إذ وجد عدد حقيقي ℓ_d حيث: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell_d=f_d'(x_0)$

  العدد $f_d'(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليمين في x_0 .
- f دالة عددية معرفة على $I_g=]x_0-\alpha\,;\,x_0]$. (أي على يسار x_0)

  نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ_g حيث: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell_g=f_d'(x_0)$

  العدد $f_g'(x_0)$ يسمى العدد المشتق على اليسار في x_0.

3. خاصية: التأويل الهندسي لنصفي المماس في x_0 :

f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I يحتوي على x_0.

f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 يكافئ f قابلة للاشتقاق على يمين و يسار x_0 و $f_d'(x_0)=f_g'(x_0)$.

B. لتأويل الهندسي لنصفي المماس في x_0 :

1. معادلة نصف مماس على اليمين – على اليسار :

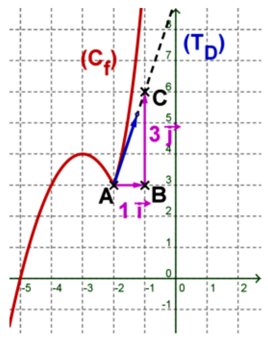
نأخذ : $\begin{cases} f(x)=(x+3)^3+2 & ;x\geq -2 \\ f(x)=-(x+3)^2+4 & ;x<-2 \end{cases}$. لدينا : $f'_d(-2)=3$ و $f'_g(-2)=-2$.

معادلتي نصفي المماس :

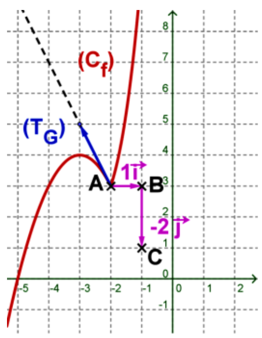
على اليمين: $(T_d): y=(x-x_0)f_d'(x_0)+f(x_0)$ مع $x\geq x_0$.

على اليسار: $(T_g): y=(x-x_0)f_g'(x_0)+f(x_0)$ مع $x\leq x_0$

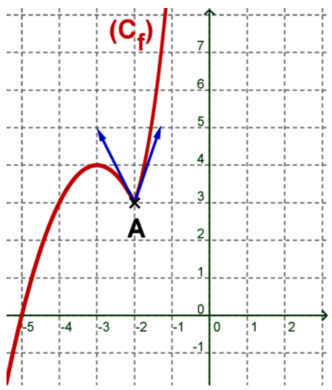
نصف المماس على يمين -2



نصف المماس على يسار -2



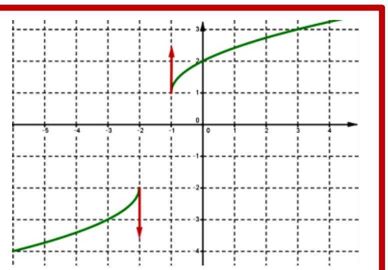
نصفي المماس في -2 النقطة. $A(-2,3)$ نقطة مزواة



2. تمرين :

$f(x)=|x-3|$. أدرس اشتقاق f في 3 $x_0=3$.

3. نصف مماس الموازي لمحور الأراتيب: $f(x)=\sqrt{(x+1)(+2)}$



أ- على يمين x_0 : حيث $\lim_{x\to(x_0)^+} f(x)=f(x_0)$ و $\lim_{x\to(x_0)^+}\dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'}=\infty$.

فهذه الحالة (C_f) له نصف مماس عمودي (أو موازي لمحور الأراتيب) على يمين النقطة $M(x_0,f(x_0))$. مثال $x\to -1^+$

ب- على يسار x_0 : حيث $\lim_{x\to(x_0)^-} f(x)=f(x_0)$ و $\lim_{x\to(x_0)^-}\dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'}=\infty$.

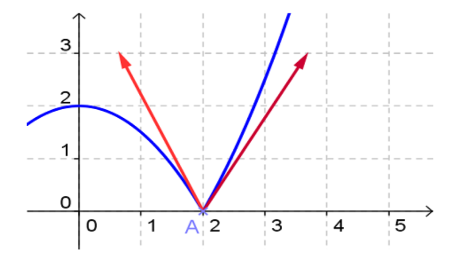
فهذه الحالة (C_f) له نصف مماس عمودي (أو موازي لمحور الأراتيب) على يسار النقطة $M(x_0,f(x_0))$. مثال $x\to -1^-$

4. نقطة مزواة :

الحالة التي يكون فيها نصفي مماس لنفس النقطة $A(x_0,f(x_0))$ ليس لهما نفس الحامل (ليس لهما نفس المعامل الموجه) في هذه الحالة النقطة $A(x_0,f(x_0))$ تسمى نقطة مزواة .

مثال 1 : المثال السابق النقطة $A(-2,3)$ هي نقطة مزواة (point anguleux) .

مثال 2 : النقطة $A(2,0)$ هي نقطة مزواة :



IV. الاشتقاق على مجال :

1. مجال على شكل $]a,b[$ - على شكل $[a,b[$.

درس : الاشتقاق

- تعريف:

نقول إن دالة عددية f قابلة للاشتقاق على $I =]a;b[$ يكافئ أن f قابلة للاشتقاق في كل نقطة x_0 من I .

نقول إن دالة عددية f قابلة للاشتقاق على $[a;b[$ يكافئ : f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ و f قابلة للاشتقاق على يمين a .

V. الدالة المشتقة لدالة عددية f:

1. تعريف:

f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة g التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة ل f و نرمز لها ب $g = f'$

أو أيضا الدالة g والمعرفة ب : $g : I \to \mathbb{R}$ ، $x \to g(x) = f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة ل f على I ونرمز لها ب $g = f'$

2. نشاط :

حدد الدالة المشتقة f' ل f على $D_f = \mathbb{R}$ حيث : $f(x) = c ;(c \in \mathbb{R})$.

3. خاصية :

f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I و f' الدالة المشتقة ل f على I .

- الدالة الثابتة : $f(x) = c ;(c \in \mathbb{R})$ قابلة للاشتقاق على $I = \mathbb{R}$ و دالتها المشتقة على $I = \mathbb{R}$ هي $f'(x) = (c)' = 0$.
- الدالة التطبيق المطابق على $\mathbb{R}$: $f(x) = x$ قابلة للاشتقاق على $I = \mathbb{R}$ و دالتها المشتقة على $I = \mathbb{R}$ هي $f'(x) = (x)' = 1$.
- الدالة المربع : $f(x) = x^2$ قابلة للاشتقاق على $I = \mathbb{R}$ و دالتها المشتقة على $I = \mathbb{R}$ هي $f'(x) = (x^2)' = 2x$.
- الدالة المكعب : $f(x) = x^3$ قابلة للاشتقاق على $I = \mathbb{R}$ و دالتها المشتقة على $I = \mathbb{R}$ هي $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$.
- الدالة الحدية من الدرجة n: $f(x) = x^n$ قابلة للاشتقاق على $I = \mathbb{R}$ و دالتها المشتقة على $I = \mathbb{R}$ هي $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$.
- الدالة المقلوب: $f(x) = \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ و دالتها المشتقة على $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ هي $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- الدالة الجذر المربع : $f(x) = \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $I =]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة على $I =]0,+\infty[$ هي $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

VI. الدالة المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية (أو المتتابعة) لدالة f .

1. نشاط:

1) $f(x) = x$. هل f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أعط دالتها المشتقة f' ؟ 2)هل f' بدورها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؟

2. مفردات :

- المشتقة ل f' تسمى المشتقة الثانية ل f . نرمز لها ب : $(f'(x))' = f''(x) = f^{(2)}(x)$.
- إذا كانت $f^{(2)}$ بدورها قابلة للاشتقاق على I فدالتها المشتقة $\left(f^{(2)}\right)'(x)$ تسمى المشتقة الثالثة ل f ونرمز لها ب $\left(f^{(2)}\right)' = f^{(3)}$

3. بصفة عامة :

المشتقة من الرتبة n للدالة f (أي $f^{(n)}(x)$)هي المشتقة ل $f^{(n-1)}(x)$ (أي المشتقة من الرتبة n-1) ونرمز لها ب:

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}\right)'(x)$$

4. مثال: أحسب $f^{(3)}(x)$ حيث : أ - $f(x)=x^5$ ب - $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

VII. العمليات على الدوال المشتقة :

1. نشاط :

لتكن f g دالتين قابلتين للاشتقاق في x_0 .

1) هل الدالة $f+g$ قابلة للاشتقاق في x_0 ؟

2) الدالة $f\times g$ قابلة للاشتقاق على مجال I و دالتها المشتقة تحقق ما يلي : $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

استنتج اشتقاق الدالة αf ثم $f^2=f\times f$ ثم $f^3=f\times f\times f$ ..... ثم f^n

3) الدالة $\dfrac{1}{g}$ قابلة للاشتقاق على مجال I.حيث: $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x)=-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$ مع شرط $g(x)\neq 0$ على مجال I.

استنتج أن الدالة $\dfrac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق على مجال I ثم استنتج كتابة للدالة المشتقة ل $\dfrac{f}{g}$.

4) أعط الخاصيات.

2. خاصيات :

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I.

الدالة $f+g$ قابلة للاشتقاق على مجال I و $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

الدالة $f\times g$ قابلة للاشتقاق على مجال I و $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

الدالة $\dfrac{1}{g}$ قابلة للاشتقاق على مجال I و $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x)=-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$ مع شرط $g(x)\neq 0$ على مجال I.

الدالة $\dfrac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق على مجال I و $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ مع شرط $g(x)\neq 0$ على مجال I.

3. مثال: أحسب f' مع: 1) $f(x)=7$; 2) $f(x)=x$; 3) $f(x)=5x$; 4) $f(x)=5x+7$; 6) $f(x)=3x^2+5x+7$

VIII. اشتقاق الدوال : الحدودية – الجذرية – $g(x)=\sqrt{f(x)}$ - $f^n(x)$ - $f(ax+b)$:

A. اشتقاق الدوال الحدودية – الدوال الجذرية :

1. خاصيات :

- كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها $D_f=\mathbb{R}$. مع $(ax^n)'=nax^{n-1}$ و $n\in\mathbb{N}^*$.
- كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها D_f .

B. اشتقاق الدالة $f^n(x)$

1. خاصية:

f قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة f^n $(n\in\mathbb{N}^*)$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا $(f^n)'(x)=nf^{n-1}(x)f'(x)$.

إذا كانت $f(x)\neq 0$ لكل x من I . الدالة $f^p(x)$ $(p\in\mathbb{Z}^*)$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا $(f^p)'(x)=pf^{p-1}(x)f'(x)$

2. مثال:
$g(x)=(-2x^4+5x^2+x-3)^7$ نحسب $g'(x)$.

لدينا: $g'(x)=\left[(-2x^4+x-3)^7\right]'=7(-2x^4+x-3)^6(-2x^4+x-3)'=7(-2x^4+x-3)^6(-8x^3+1)$

C. اشتقاق الدوال التي على شكل : $f(ax+b)$

1. خاصية:

f قابلة للاشتقاق على مجال I. a و b من $\mathbb{R}$. لتكن J مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b\in I$

الدالة $g:x\mapsto g(x)=f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J.مع: $\forall x\in J\ ;g'(x)=[f(ax+b)]'=af'(ax+b)$

2. مثال:
نضع $(\sin(x))'=\cos(x)$.أحسب: g' حيث $g(x)=\sin(5x+3)$.

D. اشتقاق الدوال التي على شكل : $\sqrt{f(x)}$

1. خاصية:

f دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I .

الدالة $g(x)=\sqrt{f(x)}$. قابلة للاشتقاق على مجال I مع $\forall x\in I:\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{2\times\sqrt{f(x)}}$.

مثال : $g(x)=\sqrt{x^6+5x^2+1}$.أحسب g' . لدينا $(g(x))'=\left(\sqrt{x^6+5x^2+1}\right)'=\dfrac{(x^6+5x^2+1)'}{2\times\sqrt{x^6+5x^2+1}}=\dfrac{(6x^5+10x)}{2\times\sqrt{x^6+5x^2+1}}$

IX. اشتقاق الدوال المثلثية :

1. نشاط : نعتبر الدالة $f(x)=\cos(x)$.

1) بين أن f قابلة للاشتقاق في x_0 من $\mathbb{R}$. 2) بين أن $g(x)=\sin(x)$ قابلة للاشتقاق في x_0 من $\mathbb{R}$.

3) بين أن $g(x)=\tan(x)$ قابلة للاشتقاق في x_0 حيث $x\neq \pi/2+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$. 4) أعط الخاصيات .

1. خاصية:

- الدالة $f(x)=\cos(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=(\cos(x))'=-\sin(x)$.
- الدالة $f(x)=\sin(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=(\sin(x))'=\cos(x)$.
- الدالة $f(x)=\tan(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ و $f'(x)=(\tan(x))'=1+\tan^2(x)$.

2. نتائج :

$(\cos(ax+b))'=-a\sin(ax+b)$ و $(\sin(ax+b))'=a\cos(ax+b)$ و $(\tan(ax+b))'=a(1+\tan^2(ax+b))$

درس : الاشتقاق

مثال : احسب f' مع : $f(x)=3\sin(9x+3)-4\cos^3(8x-1)+3\tan^6(7x+3)$

X. جدول الدوال المشتقة للدوال الاعتيادية :

الدالة f	مجموعة تعريف f D_f	الدالة المشتقة f'	مجموعة تعريف f' $D_{f'}$
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ ؛ $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$ ؛ $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$D_f=[0,+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'}=]0,+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sin x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\tan x$	$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$	$f'(x)=1+\tan^2 x$	$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$x\in D_g\,/\,g(x)\geq 0$	$f'(x)=\dfrac{g'(x)}{2\times\sqrt{g(x)}}$	$x\in D_{g'}\,/\,g(x)>0$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\tan(ax+b)$	$ax+b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$	$f'(x)=a\left[1+\tan^2(ax+b)\right]$	$ax+b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\};c\neq 0$	$f'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\};c\neq 0$

قواعد الاشتقاق :

الجمع	$(f+g)'=f'+g'$	المقلوب	$\left(\dfrac{1}{g}\right)'=-\dfrac{g'}{g^2}$
الجداء رقم 1 الجداء رقم 2	$(\alpha f)'=\alpha f'$ $(fg)'=f'g+fg'$	الخارج	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$
القوى نوع آخر	$(f^n)'=n\times f'\times f^{n-1}$ $(f(ax+b))'=af'(ax+b)$	الجذر المربع	$(\sqrt{f})'=\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

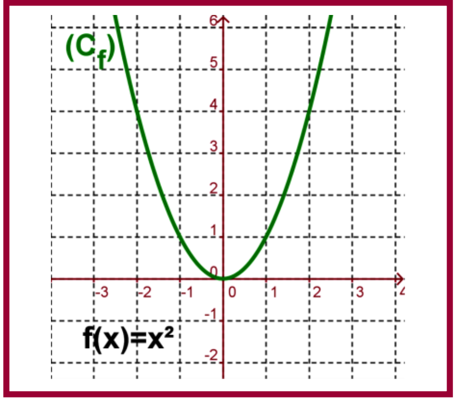
XI. المشتقة الأولى و تطبيقاتها:

ملحوظة:

في جميع الفقرات من هذا الدرس f دالة عددية للمتغير الحقيقي x . (C_f) منحناها في (م . م . م) معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A. رتابة دالة عددية وإشارة f' :

1. نشاط:



الرسم الآتي يمثل منحنى الدالة $f(x)=x^2$

1) لدينا f تزايدية على $[0,+\infty[$ أعط f' ثم إشارة f'.

2) ما هي رتابة f على $]-\infty,0]$ أعط f' ثم إشارة f'.

3) أعط الخاصية ؟ ثم الخاصية العكسية.

2. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

- إذا كانت f تزايدية على I فإن $\forall x\in I : f'(x)\geq 0$.
- إذا كانت f تناقصية على I فإن $\forall x\in I : f'(x)\leq 0$.
- إذا كانت f ثابتة على I فإن $\forall x\in I : f'(x)=0$.

3. برهان :

- نعتبر الحالة 1 : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f تزايدية على I.

ليكن x_0 من I نعتبر الدالة g : $x\in I\setminus\{x_0\}$; $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ بمأن f تزايدية على I إذن $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$

بمأن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و x_0 من I إذن f قابلة للاشتقاق في x_0 و بالتالي $g(x)$ لها نهاية منتهية في x_0 و منه

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\geq 0$ (خاصيات النهايات و الترتيب).

و بمأن ذلك لكل x_0 من I فإن : $\forall x_0\in I : f'(x_0)\geq 0$

خلاصة : $\forall x\in I : f'(x)\geq 0$.

- نعتبر الحالة 2 : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f تناقصية على I.
  بنفس الطريقة نبين على صحة ذلك .

4. خاصية : (تقبل)

f قابلة للاشتقاق على مجال I .

- إذا كانت f' موجبة قطعا على I (يمكن للدالة f' أن تنعدم في نقط منعزلة من I وهذا لا يؤثر على رتابة f) فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كانت f' سالبة قطعا على I (يمكن للدالة f' أن تنعدم في نقط منعزلة من I) فإن f تناقصية قطعا على I.
- إذا كانت f' منعدمة على I (على I بكامله) فإن f ثابتة على I.

5. مثال :

أدرس تغيرات f على $\mathbb{R}$ مع $f(x)=(2x+4)^2$.

1) حساب f' : لدينا :

$$f'(x)=\left[(2x+4)^2\right]'$$
$$=2(2x+4)'(2x+4)=2\times 2(2x+4)=8x+16$$

2) إشارة f': لدينا $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 8x+16\geq 0$

$\Leftrightarrow x\geq -2$

إذن : f' موجب على $[-2,+\infty[$ و سالب على $]-\infty,-2]$

3) جدول تغيرات f:

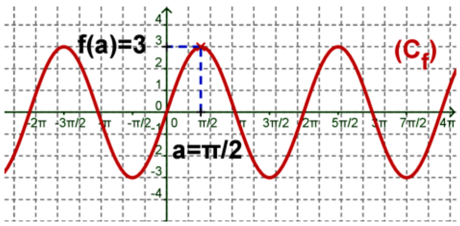
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	−	0	+
f	$+\infty$ ↘	$f(-2)=0$	↗ $+\infty$

B. مطارف دالة عددية قابلة للاشتقاق.

1. نشاط:

المنحنى الآتي يمثل دالة قابلة للاشتقاق
على مجال مفتوح I. a عنصر من I.

1) هل f تقبل مطراف في a ؟
2) أعط قيمة ل $f'(a)$.
3) أعط الخاصية.



2. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. a عنصر من I.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة a و تقبل مطراف في النقطة a فإن $f'(a)=0$.

3. ملحوظة :

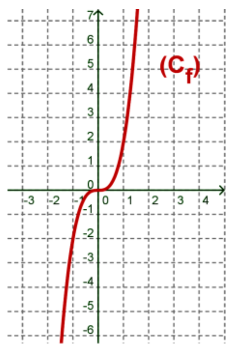
إذا كان $f'(a)=0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن $f(a)$ مطراف للدالة f.

4. مثال :

$f(x)=2x^3$ لدينا : $f'(x)=6x^2$ ومنه : $f'(0)=0$

ولكن $f(0)$ ليس مطراف ل f.

الدالة $f(x)=2x^3$



5. خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I. a عنصر من I
إذا كانت f' تنعدم في النقطة a و f' تتغير إشارتها بجوار a فإن $f(a)$ مطراف ل f.

XII. معادلة تفاضلية على شكل $y''+\omega^2y=0$:

1. تقديم:

في هذه الفقرة نرمز لدالة f ب y و f' ب y' و f'' ب y'' .....

الكتابة التالية: $(E)\ :\ 5y''-3y'+7y+2=0$ تسمى معادلة تفاضلية من الدرجة 2 (أو من الرتبة 2). الأعداد 5 و 3− و 7 و 2 تسمى معاملات ثابتة للمعادلة التفاضلية (E) .بمأن الطرف الثاني للمعادلة منعدم نقول أن المعادلة بدون طرف ثاني .

2. مثال: $y''+4y=0$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بدون طرف ثاني معاملاتها ثابتة وهي 1 و 4.

3. تعريف:

ليكن ω من $\mathbb{R}$. y دالة و y'' مشتقتها الثانية .
المعادلة $y''+\omega^2y=0$ ذات المجهول y تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بدون طرف ثاني. كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و تحقق المتساوية $\forall x\in\mathbb{R}\ :f''(x)+\omega^2 f(x)=0$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$.

4. مثال:

$y''+9y=0$ هي معادلة تفاضلية.

5. خاصية :

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$ هو مجموعة الدوال المعرفة كما يلي : $y:x\mapsto\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$
حيث α و β من $\mathbb{R}$.

6. ملحوظة:

حل المعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$ يعني تحديد الحل العام لهذه المعادلة.

7. مثال:

نحل المعادلة التفاضلية $y''+9y=0$. لدينا $\omega=3$ أو $\omega=-3$ ومنه الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هو مجموعة الدوال التي على شكل : $y(x)=\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

8. حالة خاصة:

$y''=0$ إذن $y'=0$ هي دالة ثابتة إذن y هي على شكل $y(x)=ax+b$; a و b من $\mathbb{R}$.

9. مثال: نحدد الدالة f التي تحقق المعادلة التفاضلية: $y''+16y=0$ حيث $f(0)=1$ و $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$

الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) هو على شكل : $y(x)=\alpha\cos 4x+\beta\sin 4x$.

لدينا :

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f\left(\frac{\pi}{8}\right)=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha\cos(4\times0)+\beta\sin(4\times0)=1 \\ \alpha\cos\left(4\times\frac{\pi}{8}\right)+\beta\sin\left(4\times\frac{\pi}{8}\right)=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha=1 \\ \beta=1 \end{array}\right.$$

خلاصة : الحل العام هو الدوال التي على شكل : $f(x)=y(x)=\cos 4x+\sin 4x$

XIII. OPTIMISATION (تحديد أفضل الاختيارات أو أحسن الأجوبة ممكنة لوضعيات معطاة) .

تقديم 1 :

Optimiser : du latin optimum qui signifie le meilleur

- هي : تسمح لنا للحصول على أحسن الاختيار أو أفضل النتائج الممكنة عن طريق عمل ملائم لوضعية معطاة .
- في الرياضيات : **Opitimiser une situation**

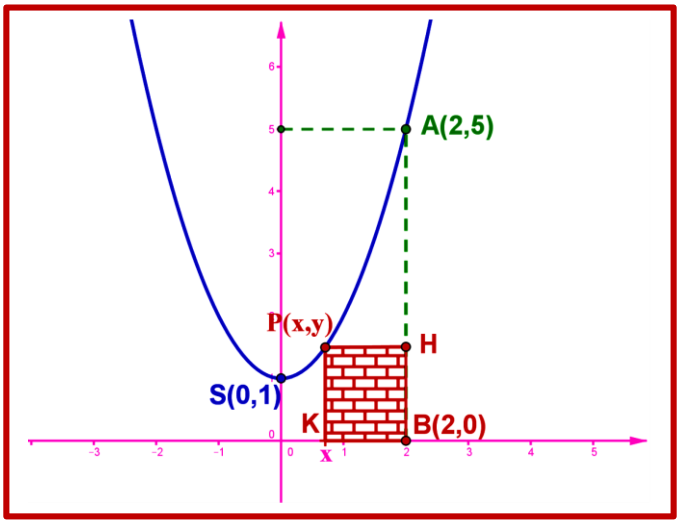
يتطلب لتحليل و لإدراج هذه الوضعية على شكل دالة ثم تحديد المطارف التي تعطي أفضل و أحسن الاختيارات للإجابة عن السؤال .

تقديم 2 :

هناك كثير من المسائل من الحياة العامة تدفعنا لتحديد القيم القصوية أو القيم الدنيوية مرتبطة بكمية متغيرة . حيث هذه القيم تمثل الأفضل أو الأحسن للوضعية المطروحة أو المسألة المطروحة نسمي هذه القيم : القيم الأحسن « valeurs Optimales » .
تحديد هذه القيم يمثل تمرين أو مسألة « optimisation »

مثال 1:

الشكل التالي يمثل شلجم رأسه $S(0,1)$ ويمر من النقطة $A(2,5)$ ثم نعتبر النقطة $B(2,0)$



1. حدد $f(x)$ معادلة الشلجم .
2. $P(x,y)$ نقطة تنتمي إلى منحنى الشلجم حيث $0 \leq x < 2$ ؛

- لنعتبر النقطة H المسقط العمودي للنقطة P على المستقيم (AB).
- لنعتبر النقطة K المسقط العمودي للنقطة P على محور الأفاصيل .

أ- حدد مساحة المستطيل $PHBK$ بدلالة x

ب- حدد أفصول النقطة $P(x,y)$ من الشلجم حيث :
مساحة المستطيل $PHBK$ تكون قصوية ؟

3. حدد المساحة القصوية للمستطيل $PHBK$.

مثال 2 : (بعد)