I. تقديم المجموعة $\mathbb{C}$:

01. نشاط: لنعتبر المعادلة: $x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$

1) هذه المعادلة: ليس لها حل في $\mathbb{R}$. وهذا يفرض علينا أن نستعمل العدد i وهو عدد تخيلي حيث $i^2 = (-i)^2 = -1$ ومنه نحصل على أن i و $-i$ حلين للمعادلة

2) لنعتبر المعادلة: $(E): x^2 - 2x + 2 = 0$

باستعمال نفس خاصيات عمليتي الجمع و الضرب في $\mathbb{R}$ و العدد التخيلي i حيث $i^2 = (-i)^2 = -1$.

تحقق أن: المعادلة (E) تكتب على الشكل الآتي $(E): (x-1)^2 + 1 = 0$

تحقق بأن: $1+i$ و $1-i$ حلي للمعادلة (E)

02. مفردات:

- العدد i هو عدد تخيلي.
- العددان $1+i$ و $1-i$ نسميهما عددين عقديين و بصفة عامة
- نكتب عدد عقدي على الشكل $z = a + bi$ مع $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$.

03. تعريف:

- عدد عقدي هو عدد يكتب على الشكل $z = a + bi$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ و i يسمى عدد تخيلي يحقق $i^2 = -1$.
- الأعداد العقدية تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد العقدية ونرمز لها ب: $\mathbb{C}$.
- المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ ولهما نفس الخاصيات.(التبادلية ؛ التجمعية .....)

04. مفردات :

- $a+bi$ يسمى عدد عقدي و نرمز له في الغالب ب : z
- المجموعة $\mathbb{C}$ تسمى مجموعة الأعداد العقدية.
- الكتابة : $a+bi$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z او أيضا الشكل الجبري للعدد العقدي z
- العدد الحقيقي a يسمى الجزء الحقيقي ل z : ونكتب: $Re(z) = a$ مثال: $Re(2-3i) = 2$
- العدد الحقيقي b يسمى الجزء التخيلي ل z : ونكتب: $Im(z) = b$ مثال: $Im(2-3i) = -3$
- العدد العقدي $z' = a - bi$ يسمى مرافق العدد العقدي z ويرمز له ب : $z' = \overline{z} = a - bi$
مثال: $z = 2 - 3i$ مرافقه هو $\overline{z} = \overline{2-3i} = 2 + 3i$
- $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow a = a'$ و $b = b'$.

II. العمليات على الأعداد العقدية :

ليكن : $z = x + yi$ و $z' = x' + y'i$ من $\mathbb{C}$

العملية : الجمع في $\mathbb{C}$	مثال
$z + z' = x + yi + x' + y'i = (x + x') + (y + y')i$	$z + z' = 1 + 5i + 2 - 3i = 3 + 2i$
العملية : الضرب في $\mathbb{C}$	**مثال**
$z \times z' = (x + yi) \times (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$	$z \times z' = (1+5i) \times (2-3i)$ $= 1 \times 2 + 5i \times (-3i) + (1 \times (-3) + 5 \times 2)i = 17 + 7i$

العملية : الضرب في $\mathbb{C}$ (حالة خاصة)	مثال
1) $k.z=k.(x+yi)=kx+kyi$ 2) $z\times\bar{z}=x^2+y^2$	1) $-3\times z=-3\times(1+5i)=-3-15i$ 2) $(2+3i)\times\overline{(2+3i)}=2^2+3^2=13$
العملية : المقلوب في $\mathbb{C}$ (نستعمل مرافق z')	مثال
$\frac{1}{z'}=\frac{1}{x'+y'i}=\frac{1\times\overline{z'}}{z'\overline{z'}}=$ $=\frac{1\times(x'-y'i)}{(x'+y'i)(x'-y'i)}=\frac{x'}{x'^2+y'^2}-\frac{y'}{x'^2+y'^2}i$	$\frac{1}{z'}=\frac{1}{2-3i}=\frac{2+3i}{(2-3i)\times(2+3i)}$ $=\frac{2}{2^2+3^2}+\frac{3}{2^2+3^2}i=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$
العملية : الخارج في $\mathbb{C}$ (نستعمل مرافق z')	مثال
$\frac{z}{z'}=\frac{x+yi}{x'+y'i}=\frac{z\times\overline{z'}}{z'\times\overline{z'}}=\frac{1}{z'\times\overline{z'}}\times z\times\overline{z'}$ $=\frac{1}{x'^2+y'^2}\times(x+yi)(x'-y'i)$ $=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}+\frac{yx'-xy'}{x'^2+y'^2}i$	$\frac{z}{z'}=\frac{1+5i}{2-3i}=\frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)\times(2+3i)}$ $=\frac{1\times2+5i\times3i}{2^2+3^2}+\frac{5i\times2+1\times3i}{2^2+3^2}$ $=\frac{-13}{13}+\frac{13}{13}i=-1+i$

❖ أمثلة: أحسب ما يلي:

- $z_1=2+5i-(-4+2i)=2+4+(5-2)=6+3i$
- $z_2=2+5i-3i(-4+2i)=2+5i+12i+6=8+17i$
- $z_3=(2+5i)(-4+2i)$
  $=2\times(-4)+5i\times2i+(2\times2+5\times(-4))i=-18-16i$
- $z_4=\frac{1}{1+3i}=\frac{1\times(1-3i)}{(1+3i)\times(1-3i)}=\frac{1-3i}{1^2+3^2}=\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i$
- $z_4=\frac{2+3i}{5-i}=\frac{(2+3i)\times(5+i)}{(5-i)\times(5+i)}$
  $=\frac{10-3+(2+15)i}{5^2+1^2}=\frac{7+17i}{26}=\frac{7}{26}+\frac{17}{26}i$

❖ ملحوظة:

- $(a+bi)^2=a^2+2abi+(bi)^2=a^2+2abi-b^2$
- $(a-bi)^2=a^2-2abi+(-bi)^2=a^2-2abi-b^2$
- $(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$

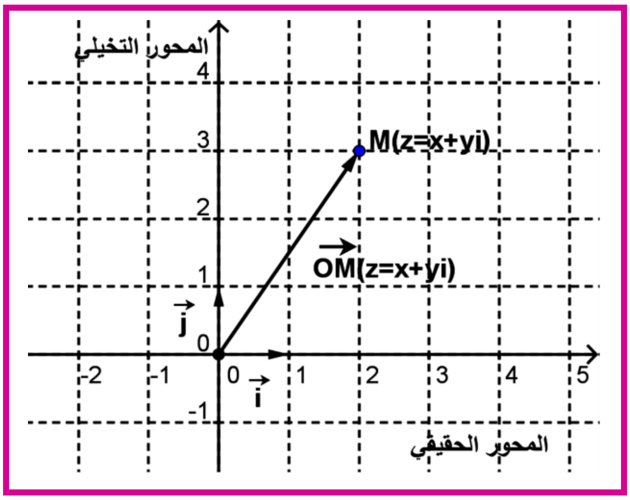
III. التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

01. نشاط:

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$ لنعتبر التطبيق الآتي:

$$f:\quad \mathbb{C}\to(P)$$

$$z=x+yi\to f(z)=f(x+yi)=M(x,y)$$ (أي $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$)



1) أنشئ النقط التالية M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 صورة الأعداد التالية :

$z_1 = 3$ و $z_2 = 3i$ و $z_3 = -2-3i$ و $z_4 = 2+i$ و $z_5 = 2-i$

02. مفردات:

- المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$ يسمى المستوى العقدي.
- النقطة $M(x,y)$ هي صورة العدد العقدي $z = x + yi$.
  نكتب: $M_{(z)}$ أو $M_{(x+yi)}$ نقرأ : النقطة M التي لحقها z.
  نكتب كذلك : z_M ونقرأ z لحق النقطة M.
- المتجهة $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ تسمى صورة العدد العقدي z .
  نكتب : $\overrightarrow{OM}(z)$ أو $\overrightarrow{OM}(x+yi)$ نقرأ $\overrightarrow{OM}$ المتجهة التي لحقها z.
  نكتب كذلك : $z_{\overrightarrow{OM}}$ نقرأ z لحق النقطة $\overrightarrow{OM}$.
- كل عدد عقدي حقيقي صرف z أي $(z = x)$ صورته النقطة $M(x,0)$ تنتمي لمحور الأفاصيل $(0,\vec{i})$ ولهذا $(0,\vec{i})$ يسمى المحور الحقيقي.
- كل عدد عقدي تخيلي صرف z أي $(z = yi)$ صورته النقطة $M(0,y)$ تنتمي لمحور الأراتيب $(0,\vec{j})$ ولهذا $(0,\vec{j})$ يسمى المحور التخيلي.

03. نتائج:

$A(z_A); B(z_B); C(z_C)$ و $I(z_I)$. أربع نقط من المستوى العقدي ألحاقها على التوالي: $z_A = x_A + y_A i$ و $z_B = x_B + y_B i$ و $z_C = x_C + y_C i$ و $z_I = x_I + y_I i$.

- المتجهة $\overrightarrow{AB}$ لحقها هو: $z_B - z_A$.
- المتجهة $k.\overrightarrow{AB}$ لحقها هو : $k\times(z_B - z_A)$
- I منتصف القطعة: $[A,B]$ لحق I هو: $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- A و B و C نقط مختلفة مثنى مثنى هي مستقيمية $(\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB})$ يكافئ $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ و $k \in \mathbb{R}$. أو أيضا : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$.

❖ نبرهن على أن : العدد العقدي $z_B - z_A$ هو لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$

A و B نقطتان من المستوى العقدي لحقاهما على التوالي $z_A = x_A + y_A i$ و $z_B = x_B + y_B i$.

- $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ زوج إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$
- توجد نقطة وحيدة M من المستوى العقدي (P) حيث: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$. إذن: $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ هو زوج إحداثيتا النقطة M ومنه : لحق النقطة M أو كذلك المتجهة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ هو العدد العقدي:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$$
$$= (x_B + y_B i) - (x_A + y_A i) = z_B - z_A$$

خلاصة: العدد العقدي $z_B - z_A$ هو لحق المتجهة: $\overrightarrow{AB}$.

04. مثال:

نعتبر $I(z_I)$ $A(z_A = 2+i)$; $B(z_B = -2+i)$; $C(z_C = 5+xi)$ و $I(z_I)$ أربع نقط من المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1) أوجد $z_{\overrightarrow{AB}}$ لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

2) أوجد z_I لحق I منتصف القطعة $[AB]$.

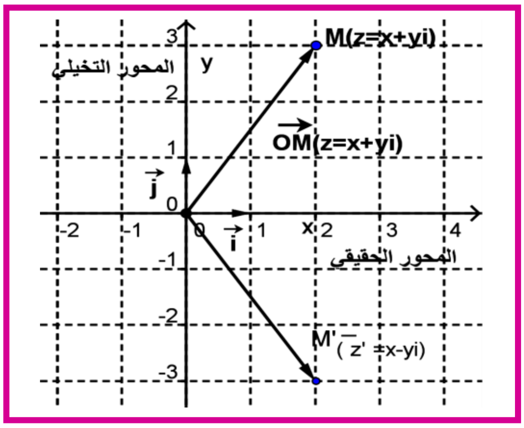
3) حدد x حيث النقط A و B و C مستقيمية.

IV. مرافق عدد عقدي :

01. تعريف:

ليكن $z = x + yi$ من $\mathbb{C}$ مع x و y من $\mathbb{R}$.

العدد الحقيقي $x - yi$ يسمى مرافق العدد العقدي z و نرمز له ب: $\bar{z} = \overline{x+yi} = x - yi$.



02. أمثلة:

$z = 1+5i$	لدينا: $\bar{z} = \overline{1+5i} = 1-5i$
$z = -1-3i$	لدينا: $\bar{z} = \overline{-1-3i} = -1+3i$
$z = 1$	لدينا: $\bar{z} = \bar{1} = 1$
$z = 2i$	لدينا: $\bar{z} = \overline{2i} = -2i$
$z = -6i$	لدينا: $\bar{z} = \overline{-6i} = 6i$

03. خاصيات المرافق:

$z = x + yi$ و $z' = x' + y'i$ من $\mathbb{C}$

- $\bar{\bar{z}} = z$ و $z + \bar{z} = 2x$ و $z - \bar{z} = 2yi$.
- $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$.
- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ و $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$; $(z' \neq 0)$ و $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

04. أمثلة:

- $\overline{\overline{2+3i}} = 2+3i$.
- $\overline{(2+3i)+1-2i} = \overline{2+3i}+\overline{1-2i} = 2-3i+1+2i = 3-i$.
- $\overline{(2+3i)\times(1-5i)} = \overline{2+3i}\times\overline{1-5i} = (2-3i)(1+5i)$.
- $\overline{\left(\frac{1}{1-5i}\right)} = \frac{1}{\overline{1-5i}} = \frac{1}{1+5i}$ و $\overline{\left(\frac{2+3i}{1-5i}\right)} = \frac{\overline{2+3i}}{\overline{1-5i}} = \frac{2-3i}{1+5i}$
- $\overline{(2+3i)^n} = (2-3i)^n$

05. ملحوظة:

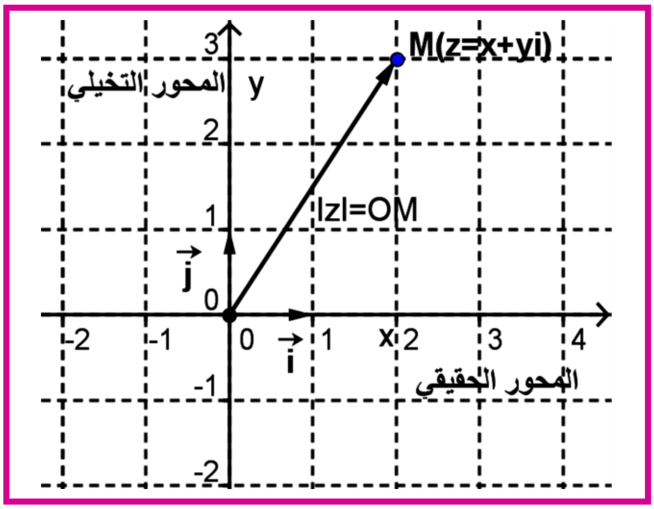
- $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ؛ (أي z عددا حقيقيا صرفا) .
- $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ ؛ (أي z عددا تخيليا صرفا) .

V. معيار عدد عقدي :

01. نشاط:

لتكن $M_{(z=x+yi)}$ نقطة من المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$

1) أوجد: $z\times\overline{z}$
2) أكتب المتجهة $\overrightarrow{OM}$ في المعلم $(0,\vec{i},\vec{j})$
3) أوجد $\|\overrightarrow{OM}\|$. ماذا تستنتج ؟



02. تعريف :

$z = x+yi$ من $\mathbb{C}$ مع x و y من $\mathbb{R}$.

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{z\overline{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z = x+yi$. نكتب : $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$.

03. التأويل الهندسي للمعيار :

إذا كان $z = x+yi$ لحق M فإن : $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \|\overrightarrow{OM}\|$

04. أمثلة:

- $|5| = |5+0i| = \sqrt{5^2+0^2} = 5$.
- $|-7| = |-7+0i| = \sqrt{(-7)^2+0^2} = 7$.
- $|2i| = |0+2i| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$.
- $|-2i| = |0-2i| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = 2$
- $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
- $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$.

03. خاصيات المعيار:

$z = x + yi$ و $z' = x' + y'i$ من $\mathbb{C}$

- $|\overline{z}| = |-z| = |z|$ و $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ و $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $(z' \neq 0)$
- $|z^n| = |z|^n$ مع $n \in \mathbb{Z}$ و $z \neq 0$

04. أمثلة:

- $|\overline{1+i}| = |-1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$
- $|(1-i)\times(2+3i)| = |1-i| \times |2+3i| = \sqrt{2} \times \sqrt{13} = \sqrt{26}$
- $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $|-i+i| \leq |-i| + |i| \Leftrightarrow 0 \leq 1+1$
- $|(1+i)^6| = |1+i|^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$

05. تمرين:

أحسب معيار الأعداد العقدية: $z_1 = -5+3i$ و $z_2 = 4i(-2+3i)$ و $z_3 = 1+i\sqrt{3}$ و $z_4 = 5+i5\sqrt{3}$ و $z_5 = \frac{7}{1-i\sqrt{3}}$ و $z_6 = \frac{4(1+i)}{2i\left(-5-i5\sqrt{3}\right)}$ و $z_7 = \frac{4(1+i)^2}{2i\left(-5-i5\sqrt{3}\right)^6}$

06. نتائج هندسية:

A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي ألحاقها $z_A = x_A + y_A i$ و $z_B = x_B + y_B i$ و $z_C = x_C + y_C i$ على التوالي مع $z_A \neq z_C$. لدينا :

- $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC}$

07. مثال:

$A(z_A = 1+i)$; $B(z_A = -1+i)$; $C(z_C = 3i)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي.

1) نحسب أطوال أضلاع المثلث ABC.

لدينا:

- $AB = |z_B - z_A| = |-1+i-(1+i)| = |-2| = 2$.

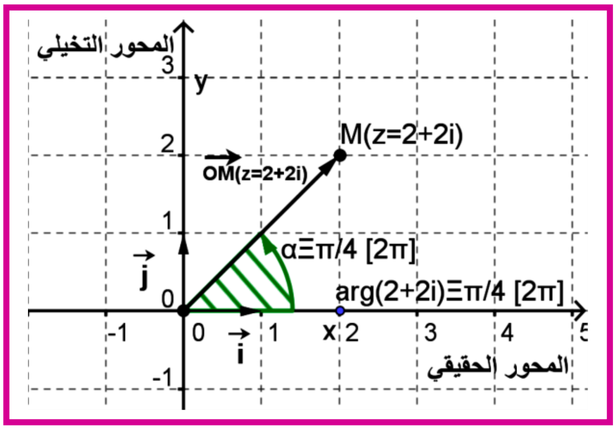
- $AC=|z_C-z_A|=|3i-(1+i)|=|-1+2i|=\sqrt{5}$.
- $CB=|z_B-z_C|=|-1+i-(3i)|=|-1-2i|=\sqrt{5}$

2) ماهي طبيعة المثلث ABC.
بمأن: $AC=CB$ المثلث ABC متساوي الساقين في C.

VI. عمدة لعدد عقدي غير منعدم:

01. نشاط:

لنأخذ عدد عقدي z غير منعدم ؛ M صورته في المستوى العقدي إذن: $M\neq O$
مثال: $z=2+2i$ من $\mathbb{C}^*$.



02. تذكير:

- لنأخذ الزاوية الموجهة: $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$
- قياسات هذه الزاوية الموجهة هي: $\overline{(\vec{i},\overrightarrow{OM})}\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

أو أيضا: $\overline{(\vec{i},\overrightarrow{OM})}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

03. مفردات :

- $\frac{\pi}{4}$ قياس لزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ يسمى عمدة العدد العقدي $z=2+2i$
- كذلك كل قياس من بين القياسات $\alpha+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ يسمى عمدة العدد العقدي $z=2+2i$.
- نرمز للعمدة العدد العقدي الغير المنعدم $z=2+2i$ ب: $\arg(z)\equiv\overline{(\vec{i},\overrightarrow{OM})}\ [2\pi]$ أو $\arg(2+2i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$
- كل عدد من بين الأعداد التي هي على شكل $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ هو كذلك عمدة العدد العقدي $z=x+yi$
- بصفة عامة نكتب : $\arg(z)\equiv\alpha[2\pi]$ أو $\arg(z)=\alpha\ +2\ k\ \pi;k\in\mathbb{Z}$
- ونفضل أخذ $\alpha\in]-\pi,\pi]$ (أي القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$) كعمدة للعدد العقدي الغير المنعدم z.
- العدد العقدي $z=0$ ليس له عمدة (لإن $M=O$ ضلع غير محدد)

04. تعريف:

لنأخذ عدد عقدي z غير منعدم و M صورته في المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$ إذن: $M\neq O$.
- كل قياس α للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ يسمى عمدة العدد العقدي z و يرمز له ب: $\arg(z)$
نكتب: $\arg(z)\equiv\alpha\ [2\pi]$ أو $\arg(z)=\alpha+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$.

05. أمثلة:

1- أنشئ في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م.م $(0,\vec{i},\vec{j})$ النقط التالية: $M_{1(z_1=2)}$ و $M_{2(z_2=-3)}$ و $M_{3(z_3=2i)}$ و $M_{4(z_4=-3i)}$ و $M_{5(z_5=1+i)}$ و $M_{6(z_6=1-i)}$ و $M_{7(z_7=2+2i)}$ و $M_{8(z_8=-1-i)}$

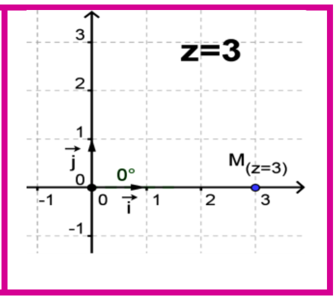
2- استنتج عمدة لحق النقط السابقة.

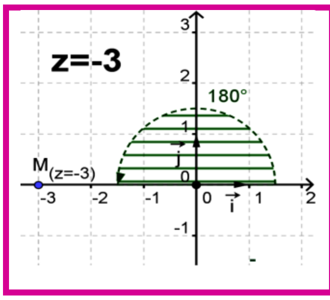
06.ملحوظة:

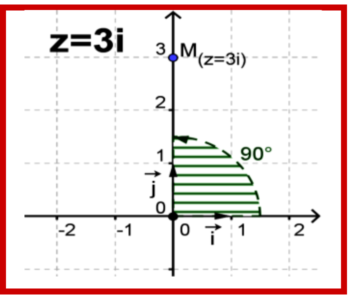
a و b من $\mathbb{R}$. $z \neq 0$ (أي $(a,b) \neq (0,0)$) حيث: $z = a+bi$ و $-z = -a-bi$ و $\bar{z} = a-bi$

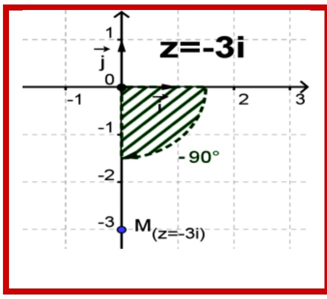
- $z = a > 0$ لدينا : $\arg(a) \equiv 0[2\pi]$. مثال : $\arg(3) \equiv 0[2\pi]$.
- $z = a < 0$ لدينا : $\arg(a) \equiv \pi[2\pi]$. مثال : $\arg(-3) \equiv \pi[2\pi]$.
- $z = bi; b > 0$ لدينا : $\arg(bi) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. مثال : $\arg(-3i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $z \neq 0$ لدينا : $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$. مثال: $\arg(2+2i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ و $\arg(-2-2i) \equiv \pi + \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
- $z \neq 0$ لدينا : $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$. مثال : $\arg(2+2i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ و $\arg(\overline{2-2i}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

أمثلة مبيانيا:









07.خاصيات العمدة:

خاصية

ليكن z و z' من $\mathbb{C}^*$ لدينا :

- $\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' \ [2\pi]$
- $p \in \mathbb{Z}; \arg(z^n) \equiv n \times \arg z \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -\arg z' \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \ [2\pi]$
- إذا كان $k > 0$ فإن : $\arg(kz) \equiv \arg(z) \ [2\pi]$.
- إذا كان $k < 0$ فإن : $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z) \ [2\pi]$.

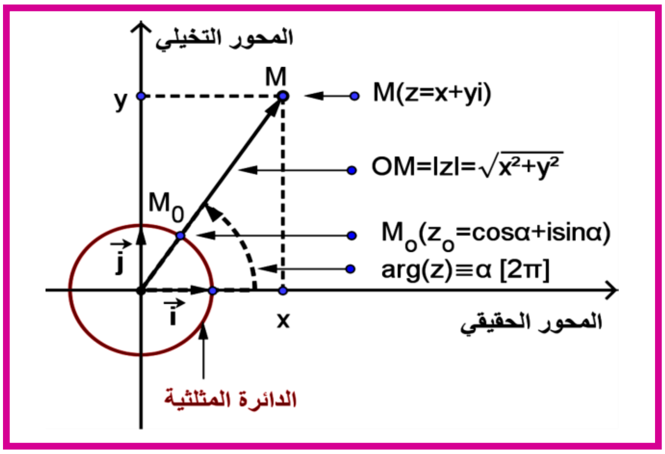
08.مثال:

أوجد عمدة : $z_1 = 1+i$ و $z_2 = 4i(1+i)$ و $z_3 = (1-i)$ و $z_4 = (1-i)(1+i)^8$ و $z_5 = 1-i\sqrt{3}$ و $z_6 = \frac{(1+i)}{(1-i\sqrt{3})}$.

VII. شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

01. نشاط:

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم. م. م. م. $(0,\vec{i},\vec{j})$



- لنأخذ عدد عقدي $z=x+yi$ غير منعدم و M صورته في المستوى العقدي (P) إذن: $M\neq O$ مع:

$$\arg(z)\equiv\overline{\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)}\equiv\alpha\ [2\pi]$$

- الدائرة المثلثية $(\mathcal{C})$ المرتبطة بالمعلم $(0,\vec{i},\vec{j})$ تقطع نصف المستقيم $[O,M)$ في M_0 ولحقها هو $z_0=\cos\alpha+i\sin\alpha$.
- لدينا : O M و M_0 مستقيمية و $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM_0}$ لهما نفس الاتجاه و منه: $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OM_0}$ مع $k>0$ (لأن $M\neq O$)

* لحق $\overrightarrow{OM}$ هو $z=x+yi$. لحق $\overrightarrow{OM_0}$ هو $z_0=\cos\alpha+i\sin\alpha$.

- لدينا : O و M و M_0 مستقيمية و منه: $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OM_0}$. إذن: $x+yi=k(\cos\alpha+i\sin\alpha)\Leftrightarrow z=kz_0$.

نحصل على : $(1): x+yi=k(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

نحدد k: $z=kz_0$ إذن $\sqrt{x^2+y^2}=|k|=k \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=|k||z_0| \Leftrightarrow |z|=|kz_0|$.

نحصل على: $(2): k=\sqrt{x^2+y^2}$

- حسب العلاقة (1) و (2) نحصل على العلاقة التالية: $z=x+yi=\sqrt{x^2+y^2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

02. مفردات:

1) الكتابة : $(3): z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي الغير المنعدم $z=x+yi$.

2) الكتابة (3): نكتبها كذلك على الشكل الآتي : $(3): z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)=[\ |z|,\arg(z)]=[r,\alpha]$.

03. تعريف وخاصية:

ليكن عدد عقدي $z=x+yi$ من $\mathbb{C}^*$ و $\arg(z)\equiv\alpha\ [2\pi]$ و $r=|z|$

- العدد العقدي z يكتب على شكل : $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ أو $z=\sqrt{x^2+y^2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ أو $z=[\ |z|\ ,\arg(z)]=[r,\alpha]$
- كل كتابة من الكتابات السابقة تسمى شكل مثلثي للعدد العقدي الغير المنعدم z.

04. أمثلة:

نعطي الشكل المثلثي ل:

- $z_1=2=2(1+0i)=2(\cos 0+\sin 0)=[2,0]$.
- $z_2=-5=5(-1+0i)=5(\cos\pi+\sin\pi)=[2,\pi]$.
- $z_3=7i=7(0+i)=7\left(\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)=\left[7,\frac{\pi}{2}\right]$.

- $z_4=-\frac{3}{5}i=\frac{3}{5}(0-i)=\frac{3}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left[\frac{3}{5},-\frac{\pi}{2}\right]$
- $z_5=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$

05.ملحوظة:1) الشكل المثلثي (حالات خاصة)

الشكل المثلثي $a>0$	مثال
$z=a=[a,0]$	$z=3=[3,0]$
$z=-a=[a,\pi]$	$z=-3=[3,\pi]$
$z=bi=\left[b,\frac{\pi}{2}\right]$	$z=3i=\left[3,\frac{\pi}{2}\right]$
$z=-bi=\left[b,-\frac{\pi}{2}\right]$	$z=-3i=\left[3,-\frac{\pi}{2}\right]$
لدينا : $z=[r,\alpha]$ و $-z=[r,\pi+\alpha]$ و $\bar{z}=[r,-\alpha]$ و $-\bar{z}=[r,\pi-\alpha]$	$z=1+i=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ فإن: $\bar{z}=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$ و $-z=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}+\pi\right]=\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

06.ملحوظة:

$1+i=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ و $1-i=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$ و $z_3=1+\sqrt{3}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ و $z_4=1-\sqrt{3}=\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]$.

07.نتائج :

z و z' من $\mathbb{C}^*$ حيث $z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ و $z'=[r',\alpha']=r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$

- $z\times z'=[r,\alpha]\times[r',\alpha']=[r\times r',\alpha\times\alpha']$ أو $z\times z'=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$

  أو $zz'=rr'(\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha'))$
- نتيجة لذلك: $z^n=[r,\alpha]^n=[r^n,n\alpha]$ أو $z^n=(r(\cos\alpha+i\sin\alpha))^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$

  حالة خاصة: $r=1$ نحصل على : $[1,\alpha]^n=[1^n,n\alpha]=[1,n\alpha]$

  أو أيضا: $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$ هي تسمى صيغة موافر (formule de MOIVRE)
- $\frac{1}{z'}=\frac{1}{[r',\alpha']}=[r',-\alpha']$ أو $\frac{1}{z'}=\frac{1}{r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')}=\frac{1}{r'}(\cos(-\alpha')+i\sin(-\alpha'))$
- $\frac{z}{z'}=\frac{[r,\alpha]}{[r',\alpha']}=\left[\frac{r}{r'},\alpha-\alpha'\right]$ أو $\frac{z}{z'}=\frac{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')}=\frac{r}{r'}(\cos(\alpha-\alpha')+i\sin(\alpha-\alpha'))$
- $-z=-1\times z=[1,\pi][r,\alpha]=[r,\alpha+\pi]=r((\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)))$
- $\bar{z}=r\overline{(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=r(\cos\alpha-i\sin\alpha)=r(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))=[r,-\alpha]$

08. أمثلة:
نعط الشكل المثلثي ل:

- $i\times z=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[r,\alpha\right]=\left[r,\frac{\pi}{2}+\alpha\right]$
- $z_1=3+3i=3\left(1+i\right)=\left[3,0\right]\times\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]=\left[3\sqrt{2},0+\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_2=-3-3i=-3\left(1+i\right)=\left[3,\pi\right]\times\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]=\left[3\sqrt{2},\pi+\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_3=2i\left(7+7i\right)=14i\left(1+i\right)=\left[14,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]=\left[14\sqrt{2},\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_4=\frac{1}{-4-4i}=\frac{1}{-4\left(1+i\right)}=\frac{1}{\left[4,\pi\right]\times\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]}=\frac{1}{\left[4\sqrt{2},\pi+\frac{\pi}{4}\right]}=\left[\frac{1}{4\sqrt{2}},-\frac{5\pi}{4}\right]=\left[\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{3\pi}{4}\right]$

09. تمرين : أعط الشكل المثلثي ل:
$z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_2=-8-8\sqrt{3}i$ و $z_3=\frac{5i}{-4-4i}$ و $z_4=\left(-8-8\sqrt{3}i\right)^{15}$ و $z_5=-\frac{5}{7}i\left(1+\sqrt{3}i\right)$.

10. ملحوظة: العلاقة التي تربط الشكل الجبري و الشكل المثلثي حيث $\left[\left|z\right|,\theta\right]=x+yi$ لدينا : $x=\left|z\right|\cos\theta$ و $y=\left|z\right|\sin\theta$

VIII. الأعداد العقدية و الهندسة

01. زاوية محددة بمتجهتين و عمدة خارج لحقيهما:
❖ خاصية:

لتكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى ، ألحاقها z_A و z_B و z_C و z_D على التوالي لدينا:
قياس الزاوية الموجهة ل

- $\left(\vec{i},\overrightarrow{AB}\right)$ هو : $\overline{\left(\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{AB}\right)}\equiv\arg(z_B-z_A)\ \left[2\pi\right]$
- $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ هو : $\overline{\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right)}\equiv\arg(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A})\ \left[2\pi\right]$
- $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$ هو : $\overline{\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}\right)}\equiv\arg(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\ \left[2\pi\right]$
- استقامية ثلاث نقط : A و B و C يكافئ : $\arg(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A})\equiv\pi\left[2\pi\right]$ أو $\arg(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A})\equiv0\left[2\pi\right]$
- توازي مستقيمين (AB) و (CD) يكافئ : $\arg(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\equiv\pi\left[2\pi\right]$ أو $\arg(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\equiv0\left[2\pi\right]$.
- تعامد مستقيمين (AB) و (CD) يكافئ : $\arg(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\equiv-\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$ أو $\arg(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A})\equiv\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$.