

$$f'_y(x) = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2}$$

بما أن :  $y \in ]-1;1[$  فإن :  $f'_y(x) > 0$  :  $\forall x \in ]-1;1[$   
 إذن :  $f_y$  تزايدية على  $]-1;1[$

$$f_y(]-1;1[) = ]-1;1[$$

و منه :  $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad f_y(x) \in E$

$$\forall (x; y) \in E^2 \quad x * y \in E$$

إذن : \* قانون تركيب داخلي في  $E$

2- لنبين أن :  $(E; *)$  زمرة تبادلية

أ- لنبين أن : \* تجميعي

نعتبر :  $(x; y; z) \in E^3$

$$(x*y)*z = \frac{x+y}{1+xy} * z$$

$$= \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} * z}$$

$$(x*y)*z = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

$$x*(y*z) = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \quad \text{كذلك :}$$

$$(x*y)*z = x*(y*z) \quad \text{إذن :}$$

و منه : \* تجميعي

ب- لنبين أن : \* تبادلي

نعتبر :  $(x; y) \in E^2$

$$x*y = \frac{x+y}{1+xy}$$

لدينا :

$$= \frac{y+x}{1+yx}$$

$$x*y = y*x$$

إذن :

و منه : \* تبادلي

ج- لبين أن \* يقبل عنصرا محايدا ثم نحدده

نعتبر :  $e \in E$  بحيث :

بحيث :  $\forall x \in E \quad x*e = e*x = x$

بما أن \* تبادلي يكفي تحديد  $e$  بحيث :  $x*e = x$

## الزمرة - الحلقة - الجسم

### تمرين 1

نعتبر :  $E = ]-1;1[$

ليكن :  $(x; y) \in E^2$

نضع :  $x*y = \frac{x+y}{1+xy}$

1- بين أن : \* قانون تركيب داخلي في  $E$

2- بين أن :  $(E; *)$  زمرة تبادلية

### الحل

1- لنبين أن : \* قانون تركيب داخلي في  $E$

نعتبر :  $y \in E$

نعتبر الدالة :  $f_y(x) = \frac{x+y}{1+xy}$  معرفة على  $E = ]-1;1[$

إذن :  $(1;0)$  هو العنصر المحايد بالنسبة \* في  $E$

مماثل  $(x;y)$

أ-  $x \neq 0$

$$(xx' + yy'; xy' + yx') = (1;0)$$

$$\begin{cases} xx' + yy' = 1 \\ xy' + yx' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2x' + xyy' = x \\ xyy' + y^2x' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(x^2 - y^2) = x \\ xy' + yx' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ xy' + yx' = 0 \end{cases} \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

مماثل  $(x;y)$  هو  $(x;-y)$

ب- الحالة :  $x = 0$  : إذن :  $y = 1$  أو  $y = -1$

$$(xx' + yy'; xy' + yx') = (1;0)$$

$$\begin{cases} yy' = 1 \\ yx' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{1}{y} \\ x' = 0 \end{cases} \quad y \neq 0$$

مماثل  $(0;1)$  هو  $(0;1)$  و مماثل  $(0;-1)$  هو  $(0;-1)$

### تمرين 3

زمرة غير تبادلية (العنصر المحايد هو  $e$ )

(مماثل  $a$  هو  $a^{-1}$ )

نعتبر :  $C = \{a \in G / \forall x \in G \quad xa = ax\}$

بين أن :  $(C; \times)$  زمرة جزئية للزمرة  $(G; \times)$

### الحل

لنبين أن :  $\forall (a;b) \in C \quad ab^{-1} \in C$

نعتبر :  $x \in G$

$$ab^{-1}x = a(x^{-1}b)^{-1}$$

$$b \in C \Rightarrow x^{-1}b = bx^{-1}$$

$$ab^{-1}x = a(bx^{-1})^{-1} = axb^{-1}$$

$$a \in C \Rightarrow ax = xa$$

$$\forall (a;b) \in C \quad \forall x \in G \quad ab^{-1}x = xab^{-1}$$

$$\boxed{\forall (a;b) \in C \quad ab^{-1} \in C} \quad \text{إذن :}$$

ومنه :  $(C; \times)$  زمرة جزئية للزمرة  $(G; \times)$

لدينا :  $1_G \in C$  لأن  $\forall x \in G \quad x1_G = 1_Gx$

إذن :  $C \neq \emptyset$

$$x * e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x$$

$$\Leftrightarrow x+e = x+x^2e; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e = x^2e$$

$$\Leftrightarrow e(1-x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow e(1-x^2) = 0; \forall x \in E$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e=0}$$

إذن : \* يقبل عنصرا محايدا و هو 0

د- لنبين أن جميع عناصر  $E$  تقبل مماثلا بالنسبة للقانون \* في  $E$

نعتبر :  $x \in E$

$y$  مماثل ل  $x$  يعني :  $x * y = y * x = 0$

بما أن \* تبادلي يكفي تحديد  $y$  بحيث :  $x * y = 0$

$$x * y = 0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -x$$

بما أن :  $-x \in E$

إذن : جميع عناصر  $E$  تقبل مماثلا بالنسبة للقانون \* في  $E$

إذن : من - أ - ب - ج - د -  $(E; *)$  زمرة تبادلية

### تمرين 2

نعتبر :  $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 1\}$

ليكن :  $(x;y) \in E^2$  و  $(x';y') \in E^2$

نضع :  $(x;y) * (x';y') = (xx' + yy'; xy' + yx')$

1- بين أن : \* قانون تركيب داخلي في  $E$

2- بين أن :  $(E; *)$  زمرة تبادلية

### الحل

1- \* قانون تركيب داخلي في  $E$  (الحساب)

2- التجميعية و التبادلية évident

العنصر المحايد :

$$(x;y) * (e_x; e_y) = (xe_x + ye_y; xe_y + ye_x) = (x;y)$$

$$\begin{cases} xe_x + ye_y = x \\ xe_y + ye_x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2e_x + xye_y = x^2 \\ xye_y + y^2e_x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_x(x^2 - y^2) = x^2 - y^2 \\ xe_x + ye_y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_x = 1 \\ x + ye_y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_x = 1 \\ e_y = 0 \end{cases}$$

#### تمرين 4

$a \in G$  زمرة  $(G; \times)$

نعتبر:  $H_a = \{x \in G / xa = ax\}$

بين أن: زمرة جزئية للزمرة  $(G; \times)$   $(H_a; \times)$

#### الحل

لنبين أن:  $\forall (x; y) \in H_a^2 \quad xy^{-1} \in H_a$

$$x \in H_a \Leftrightarrow xa = ax \Leftrightarrow a^{-1}x = xa^{-1}$$

$$y \in H_a \Leftrightarrow ya = ay \Leftrightarrow a^{-1}y = ya^{-1}$$

$$xy^{-1}a = x(a^{-1}y)^{-1} = x(ya^{-1})^{-1} = xay^{-1} = axy^{-1}$$

إذن:  $\forall (x; y) \in H_a^2 \quad xy^{-1}a = axy^{-1}$

ومنه:  $\forall (x; y) \in H_a^2 \quad xy^{-1} \in H_a$

إذن: زمرة جزئية للزمرة  $(G; \times)$   $(H_a; \times)$

#### تمرين 5

نعتبر:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

نعتبر التطبيق:

$$f : (\mathbb{R}; +) \rightarrow (E; \times)$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

1- بين أن:  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

2- بين أن:  $f$  تشاكل شمولي من  $(\mathbb{R}; +)$  نحو  $(E; \times)$

3- استنتج بنية المجموعة  $(E; \times)$

$$4- \text{ نعتبر: } M = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

احسب:  $M^2$ ;  $M^3$ ; ثم استنتج  $M^n$

#### الحل

1- لنبين أن:  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

$$\text{نعتبر: } \left( \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \right) \in E^2$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & -\cos x \sin y - \sin x \cos y \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} \in E$$

و

$$\forall \left( \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \right) \in E^2 \text{ : إذن}$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \in E$$

و منه:  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

2- لنبين أن:  $f$  تشاكل شمولي من  $(\mathbb{R}; +)$  نحو  $(E; \times)$

نعتبر:  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x+y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & -\cos x \sin y - \sin x \cos y \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

إذن:  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{R}; +)$  نحو  $(E; \times)$

$$\forall \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \in E \exists x \in \mathbb{R} / f(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$f$  تشاكل شمولي من  $(\mathbb{R}; +)$  نحو  $(E; \times)$

3- استنتج بنية المجموعة  $(E; \times)$

بما أن:  $f$  تشاكل شمولي من  $(\mathbb{R}; +)$  نحو  $(E; \times)$

و زمرة تبادلية  $(\mathbb{R}; +)$

فإن:  $(E; \times)$  زمرة تبادلية

$$4- \text{ نعتبر: } M = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

حساب:  $M^2$ ;  $M^3$ ; ثم استنتج  $M^n$

من:  $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

نبين بالترجع أن:  $f(nx) = (f(x))^n$

$$\left( \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \right)^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix} \text{ : إذن}$$

#### تمرين 6

نعتبر:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / (a; b) \in \mathbb{R}^2; (a; b) \neq (0; 0) \right\}$$

إذن : شمولي  $f$  (b)

من : (a) و (b) :  $f$  تقابل

3- بين أن :  $f$  تشاكل من  $(E; \times)$  نحو  $(\mathbb{C}^*; \times)$

$$f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) = f \begin{pmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix} \\ = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) = (a + bi)(c + di)$$

إذن :  $f$  تشاكل من  $(E; \times)$  نحو  $(\mathbb{C}^*; \times)$

4- استنتاج بنية المجموعة  $(E; \times)$

بما أن :  $f$  تشاكل تقابلي من  $(E; \times)$  نحو  $(\mathbb{C}^*; \times)$

فإن :  $f^{-1}$  تشاكل  $(\mathbb{C}^*; \times)$  من نحو  $(E; \times)$

و بما أن : زمرة  $(\mathbb{C}^*; \times)$

فإن : زمرة  $(E; \times)$

#### ملاحظة

(مماثل  $a + ib$  في  $(\mathbb{C}^*; \times)$  هو  $\left( \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$ )

(مماثل  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  في  $(E; \times)$  هو  $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ -\frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$ )

العنصر المحايد في  $(\mathbb{C}^*; \times)$  هو 1

العنصر المحايد في  $(E; \times)$  هو  $f^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

#### تمرين 7

( $G; *$ ) زمرة العنصر المحايد هو  $e$  (مماثل  $a$  هو  $a^{-1}$ )

$f_a : G \rightarrow G$

$x \mapsto a * x * a^{-1}$

التطبيق  $f_a$  معرف بما يلي :

نعتبر :  $F = \{f_a / a \in G\}$

$f : G \rightarrow F$

$a \mapsto f_a$

نعتبر التطبيق :

1- بين أن  $(F; \circ)$  جزء مستقر من  $(\mathcal{F}; \circ)$

2- بين أن :  $f$  تشاكل شمولي من  $(G; *)$  نحو  $(F; \circ)$

3- استنتاج بنية المجموعة  $(F; \circ)$

#### الحل

$f : E \rightarrow \mathbb{C}^*$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + ib$$

نعتبر التطبيق :

1- بين أن :  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

2- بين أن :  $f$  تقابل

3- بين أن :  $f$  تشاكل من  $(E; \times)$  نحو  $(\mathbb{C}^*; \times)$

4- استنتاج بنية المجموعة  $(E; \times)$

#### الحل

1- لنبين أن :  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

نعتبر :  $\left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \in E^2$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix} \in E \quad \text{و}$$

إذن :  $\forall \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \in E^2$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \in E$$

ومنه :  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

2- لنبين أن :  $f$  تقابل

نعتبر :  $\left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \in E^2$

$$f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = f \left( \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow a + ib = c + id \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = f \left( \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

إذن :  $f$  تباين (a)

نعتبر :  $c + id \in \mathbb{C}^*$

لنحدد :  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in E$  بحيث :  $f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c + id$

$$f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c + id \Leftrightarrow a + ib = c + id$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$f \left( \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c + id \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

1- لنبين أن :  $(F; \circ)$  جزء مستقر من  $(\mathcal{F}; \circ)$

يعني :  $\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b \in F$   
 نعتبر :  $x \in G$

$$f_a \circ f_b (x) = a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1}$$

بما أن : \* تجميعي و  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

$$f_a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1} = (a * b) * x * (a * b)^{-1}$$

إذن :  $\forall x \in G \quad f_a \circ f_b (x) = f_{a*b} (x)$

$$\boxed{\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b = f_{a*b}}$$

وبما أن : \* قانون تركيب داخلي في  $G$

فإن :  $a * b \in G$

إذن :  $f_{a*b} \in F$

ومنه :  $f_a \circ f_b \in F$

إذن :  $\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b \in F$

ومنه :  $(F; \circ)$  جزء مستقر من  $(\mathcal{F}; \circ)$

2- لنبين أن :  $f$  تشاكل من  $(G; *)$  نحو  $(F; \circ)$

نعتبر :  $(a; b) \in G^2$

لدينا :  $f(a * b) = f_{a*b}$

إذن :  $f(a * b) = f_a \circ f_b$

إذن :  $f$  تشاكل من  $(G; *)$  نحو  $(F; \circ)$   $(a)$

- لنبين أن :  $f$  شمولي

لدينا :  $\forall f \in F \quad \exists a \in E \quad f(a) = f_a$

إذن :  $f$  شمولي  $(b)$

ومن :  $(a)$  و  $(b)$

$f$  تشاكل شمولي من  $(G; *)$  نحو  $(F; \circ)$

3- استنتاج بنية المجموعة  $(F; \circ)$

بما أن :  $f$  تشاكل شمولي من  $(G; *)$  نحو  $(F; \circ)$

و  $(G; *)$  زمرة

فإن :  $(F; \circ)$  زمرة

### ملاحظة

العنصر المحايد في  $(G; *)$  هو  $e$

العنصر المحايد في  $(F; \circ)$  هو  $f_e$   $f(e) = f_e$

مماثل  $a$  في  $(G; *)$  هو  $a^{-1}$

مماثل  $f_a$  في  $(F; \circ)$  هو  $f_{a^{-1}}$   $f(a^{-1}) = f_{a^{-1}}$

### تمرين 8

بين أن :  $(\mathbb{Z}^2; +; \times)$  حلقة تبادلية واحدة

بحيث :  $\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2$  و  $\forall (x'; y') \in \mathbb{Z}^2$

$$(x; y) + (x'; y') = (x + x'; y + y')$$

$$(x; y) \times (x'; y') = (xx' + 2yy'; xy' + yx')$$

### الحل

أ-  $(\mathbb{Z}^2; +)$  زمرة تبادلية (واضح)

صفر  $(\mathbb{Z}^2; +)$  هو  $(0; 0)$  مماثل  $(x; y)$  هو  $(-x; -y)$  في

$(\mathbb{Z}^2; +)$

ب-  $\times$  تجميعي في  $\mathbb{Z}^2$  (الحساب)

ج-  $\times$  تبادلي في  $\mathbb{Z}^2$  (الحساب)

د- وحدة  $(\mathbb{Z}^2; \times)$  هي  $(1; 0)$

هـ- القانون  $\times$  توزيعي بالنسبة للقانون  $+$  في  $\mathbb{Z}^2$

بما أن  $\times$  تبادلي في  $\mathbb{Z}^2$

نكتفي بالبرهنة أن :

$$\forall (x''; y'') \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (x'; y') \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2$$

$$(x; y) \times ((x'; y') + (x''; y'')) = ((x; y) \times (x'; y')) + ((x; y) \times (x''; y''))$$

(كذلك الحساب)

من (أ- ب- ج- د- هـ)  $(\mathbb{Z}^2; +; \times)$  حلقة تبادلية واحدة

### تمرين 9

1- بين أن :  $1 + j + j^2 = 0$  بحيث :  $j = e^{2i\pi/3}$

2- نعتبر :  $E = \{z \in \mathbb{C} / \exists (a; b) \in \mathbb{R}^2 : z = a + bj\}$

بين أن :  $(E; +; \times)$  حلقة تبادلية واحدة

### الحل

أ-  $(E; +)$  زمرة تبادلية (واضح)

طريقة البرهنة أن :  $(E; +)$  زمرة تبادلية

نبين أن :  $(E; +)$  زمرة تبادلية مباشرة

أو من الأحسن نبين أن :  $(E; +)$  زمرة جزئية من  $(\mathbb{C}; +)$

و بما أن :  $(\mathbb{C}; +)$  زمرة تبادلية

فإن :  $(E; +)$  زمرة تبادلية

ب-  $\times$  قانون تركيب داخلي في  $E$  (الحساب و العلاقة

$$(1 + j + j^2 = 0)$$

بما أن  $(\mathbb{C}; +; \times)$  جسم تبادلي و  $E \subset \mathbb{C}$  و  $\times$  قانون تركيب

داخلي في  $E$

فإن : ج-  $\times$  تجميعي في  $E$  (الحساب)

د-  $\times$  تبادلي في  $E$  (الحساب)

ج- وحدة  $(E; \times)$  هي 1

هـ- القانون  $\times$  توزيعي بالنسبة للقانون  $+$  في  $E$

من (أ-ب-ج-د-هـ) حلقة تبادلية واحدة  $(E; +; \times)$

### تمرين 10

بين أن  $(\mathbb{R}; *, T)$  جسم تبادلي

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x * y = x + y - 1 \\ x T y = x + y - xy \end{cases}$$

**الحل**

أ-  $(\mathbb{R}; *)$  زمرة تبادلية (الحساب)

العنصر المحايد في  $(\mathbb{R}; *)$  هو 1

ب-  $(\mathbb{R} - \{1\}; T)$  زمرة تبادلية (الحساب)

العنصر المحايد في  $(\mathbb{R}; T)$  هو 0

ج- القانون  $T$  توزيعي بالنسبة للقانون  $*$  في  $\mathbb{R}$  (الحساب)  
بما أن  $T$  تبادلي في  $\mathbb{R}$   
نكتفي بالبرهنة أن:

$$\forall (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \quad x T (y * z) = (x T y) * (x T z)$$

من (أ-ب-ج)  $(\mathbb{R}; *, T)$  جسم تبادلي

### تمرين 11

نعتبر:

$$\mathbb{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} / (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

بين أن  $(\mathbb{K}; +; \times)$  جسم تبادلي

**الحل**

1-  $(\mathbb{K}; +)$  زمرة تبادلية (الطريقة)

- بما أن  $(M_2(\mathbb{R}); +)$  زمرة تبادلية و  $\mathbb{K} \subset M_2(\mathbb{R})$

يكفي ان نبين أن  $(\mathbb{K}; +)$  زمرة جزئية من  $(M_2(\mathbb{R}); +)$

ومنه  $(\mathbb{K}; +)$  زمرة تبادلية

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})} \text{ هو } (\mathbb{K}; +) \text{ العنصر المحايد في}$$

2-  $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}; \times)$  زمرة تبادلية (الطريقة)

أ-  $\times$  قانون تركيب داخلي في  $\mathbb{K}$  (الحساب)

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa-5yb & xb+ya+2yb \\ -5(xb+ya+2yb) & (xa-5yb)+2(xb+ya+2yb) \end{pmatrix}$$

ب-  $\times$  تبادلي في  $\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$  (الحساب)

- بما أن  $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$  حلقة واحدة و  $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$  و  $\times$  قانون

تركيب داخلي في  $\mathbb{K}$

فإن : ج-  $\times$  تجميعي في  $\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$

د- وحدة  $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}; \times)$  هي  $1_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

هـ- لنبين أن جميع عناصر  $\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$  تقبل ماثلا في

$$\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$$

بما أن  $\times$  تبادلي في  $\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} \in \mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\} \text{ نكتفي بتحديد:}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ بحيث:}$$

$$\begin{cases} xa-5yb=1 \\ xb+ya+2yb=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax-5by=1 \\ bx+(a+2b)y=0 \end{cases} \text{ نجد:}$$

$$5b^2 + 2ab + a^2 \neq 0$$

لأن:  $\Delta'_a = -4b^2 < 0$  و  $\Delta'_b = -4a^2 < 0$

$$\begin{cases} x = \frac{a+2b}{5b^2 + 2ab + a^2} \\ y = \frac{-b}{5b^2 + 2ab + a^2} \end{cases} \text{ حل النظمة نجد:}$$

من (أ-ب-ج-د-هـ)  $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}; \times)$  زمرة تبادلية

3- القانون  $\times$  توزيعي بالنسبة للقانون  $+$  في  $\mathbb{K}$

بما أن  $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$  حلقة واحدة و  $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$  و  $\times$  قانون

تركيب داخلي في  $\mathbb{K}$  فإن القانون  $\times$  توزيعي بالنسبة للقانون  $+$

في  $\mathbb{K}$

من (1-2-3)  $(\mathbb{K}; +; \times)$  جسم تبادلي

### تمرين 12 (الإستدراكية 2003)

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} / (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ نعتبر:}$$

$$E = \{M_{(a,b)} / a^2 - 2b^2 = 1\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

1- تحقق أن  $A \in E$

2- بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

و أن قانون التركيب الداخلي  $\times$  تبادلي في  $E$

3- بين أن : جميع عناصر  $E$  تقبل مقلوبا في  $E$  بالنسبة لقانون

التركيب الداخلي  $\times$

4- بين أن  $(E; \times)$  زمرة تبادلية