دراسة و تمثيل الدوال الحدودية من الدرجة الثانية و الثالثة و دوال متخاطة

مثال1

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-x-1$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
2) احسب نهايات الدالة f عند محدات مجموعة تعريف الدالة f
3) احسب $f^{'}(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
4) انشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

الجواب

(1

$D_f=\mathbb{R}=\left]-\infty,+\infty\right[$ لأن f دالة حدودية

(2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x^2-x-1\\ &= \lim_{x\to+\infty} x^2\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^2-x-1\\ &= \lim_{x\to-\infty} x^2\\ &= +\infty\end{aligned}$$

(3

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f^{'}(x)=2x-1$

إذن إشارة $f^{'}(x)$ هي إشارة $2x-1$.

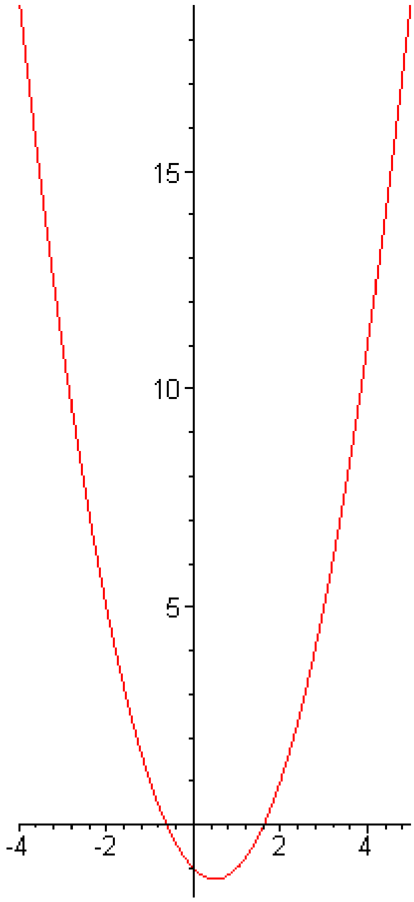
لكل x من $\mathbb{R}$:

- ♦ $f'(x)=0$ تكافئ $2x-1=0$ أي $x=\frac{1}{2}$
- ♦ $f'(x)\succ 0$ تكافئ $2x-1\succ 0$ أي $x\succ\frac{1}{2}$
- ♦ $f'(x)\prec 0$ تكافئ $2x-1\prec 0$ أي $x\prec\frac{1}{2}$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

(4



مثال2

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
2) احسب نهايات الدالة f عند محدات مجموعة تعريف الدالة f
3) هل منحنى الدالة f يقبل مقاربات أفقية ؟ عمودية؟
4) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}-\{2\}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
5) انشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ مستعينا بجدول التغيرات و جدول لصور بعض القيم

الجواب

(1

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in\mathbb{R} / x-2\neq 0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} / x\neq 2\} \\ &= \mathbb{R}-\{2\} \\ &=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[\end{aligned}$$

(2

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x}$$
$$= 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x}$$
$$= 2$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x\prec2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2\\x\prec2}} \frac{2x-1}{x-2}$$
$$= -\infty$$
لأن
$$\lim_{\substack{x\to2\\x\prec2}} 2x-1 = 3$$
و
$$\lim_{\substack{x\to2\\x\prec2}} x-2 = 0^-$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x\succ2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2\\x\succ2}} \frac{2x-1}{x-2}$$
$$= +\infty$$
لأن
$$\lim_{\substack{x\to2\\x\succ2}} 2x-1 = 3$$
و
$$\lim_{\substack{x\to2\\x\succ2}} x-2 = 0^+$$

(3

- بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ فإن المستقيم $y = 2$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

- بما أن $\lim_{\substack{x\to2\\x\prec2}} f(x) = -\infty$ و $\lim_{\substack{x\to2\\x\succ2}} f(x) = +\infty$ فإن $x = 2$ مقارب رأسي لمنحنى الدالة f بجوار 2 على اليسار و على اليمين .

(4

لكل $x \neq 2$:

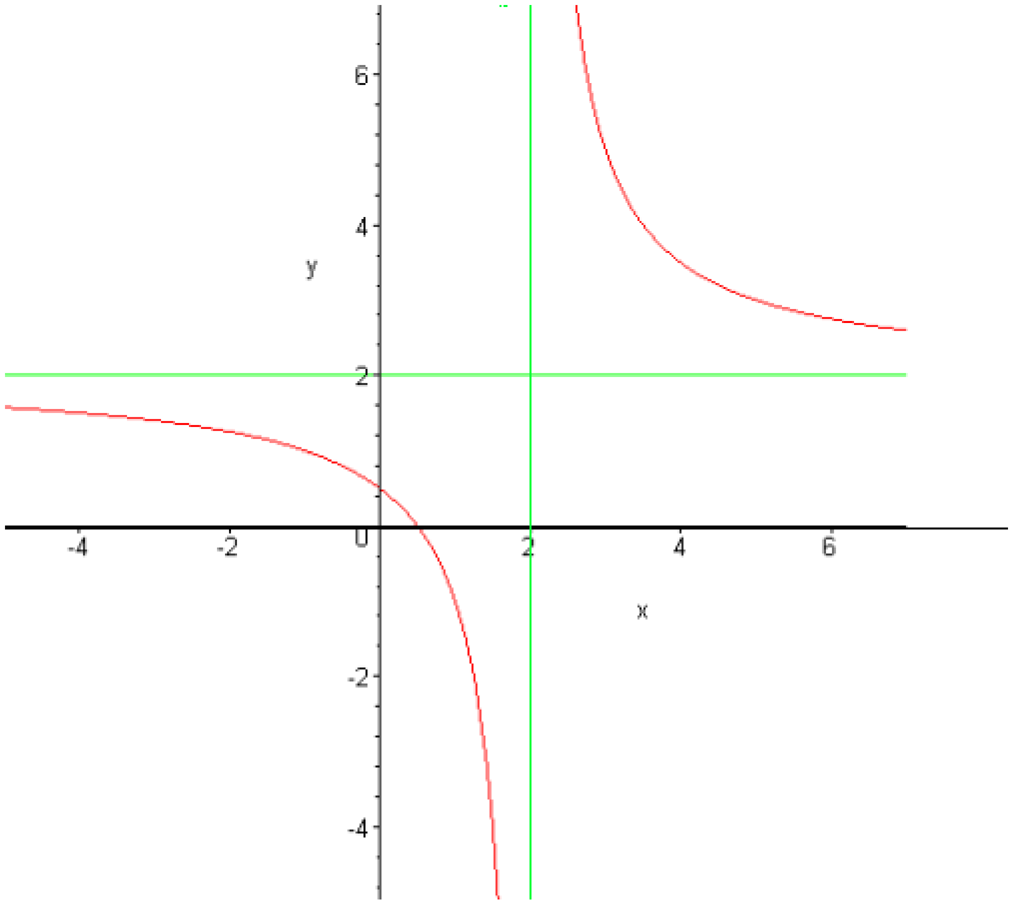
$$f'(x) = \frac{(2)(x-2)-(2x-1)(1)}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{2x-4-2x+1}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{-3}{(x-2)^2} \prec 0$$

إذن الدالة f تناقصية قطعا على كل من المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$

<u>جدول تغيرات الدالة f</u>

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

(5



مثال3

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
2) احسب نهايات الدالة f عند محدات مجموعة تعريف الدالة f
3) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
4) انشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

الجواب

(1

$D_f=\mathbb{R}=\left]-\infty,+\infty\right[$ لأن f دالة حدودية

(2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} -x^3+\frac{3}{2}x^2+6\\ &= \lim_{x\to+\infty} -x^3\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} -x^3+\frac{3}{2}x^2+6\\ &= \lim_{x\to-\infty} -x^3\\ &= +\infty\end{aligned}$$

(3

لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= -3x^2+3x\\ &= -3x(x-1)\end{aligned}$$

الثلاثية $-3x^2+3x$ أي $-3x\left(x-1\right)$ تنعدم عند 1 أو 0 .مع $f(1)=-1+\frac{3}{2}+6=\frac{13}{2}$ و $f(0)=6$.

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$\frac{17}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

(4