


سلسلة 3	المرجح	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية
<p><b>تمرين 1:</b> <math>ABCD</math> رباعي محدب. ليكن <math>E</math> و <math>F</math> هما على التوالي مركزا ثقلي المثلثين <math>ABC</math> و <math>ADC</math> بين أن <math>(EF) \parallel (BD)</math></p>		
<p><b>تمرين 2:</b> <math>ABC</math> مثلث. <math>E</math> و <math>I</math> و <math>F</math> نقط حيث <math>\overrightarrow{AE} = \frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}</math> و <math>I</math> منتصف <math>[BC]</math> و <math>\overrightarrow{CF} = \frac{7}{9}\overrightarrow{CA}</math></p> <p>1) عبر عن <math>E</math> و <math>I</math> و <math>F</math> كمرجح للنقط <math>A</math> ، <math>B</math> أو <math>C</math></p> <p>2) برهن أن النقط <math>E</math> و <math>I</math> و <math>F</math> مستقيمية.</p>		
<p><b>تمرين 3:</b> المستوى منسوب إلى معلم <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math>. نعتبر النقط <math>A(3,4)</math> و <math>B(0,2)</math> و <math>C(3,2)</math>.</p> <p>ليكن <math>E</math> منتصف <math>[BC]</math> و <math>G</math> مرجح النقطتين المتزنتين <math>(E,2)</math> و <math>(A,1)</math></p> <p>1) أوجد إحداثيتي كل من <math>E</math> و <math>G</math></p> <p>2) استنتج أن النقط <math>O</math> و <math>G</math> و <math>C</math> مستقيمية.</p>		
<p><b>تمرين 4:</b> <math>ABC</math> مثلث.</p> <p>1) حدد <math>(E_1)</math> مجموعة النقط <math>M</math> التي تحقق: <math>\ \overrightarrow{AM}\  = \ \overrightarrow{BC}\ </math> ثم أنشئها.</p> <p>2) حدد <math>(E_2)</math> مجموعة النقط <math>M</math> التي تحقق: <math>\ \overrightarrow{BM}\  = \ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\ </math> ثم أنشئها.</p> <p>3) حدد <math>(E_3)</math> مجموعة النقط <math>M</math> التي تحقق: <math>\ \overrightarrow{4CM}\  = \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\ </math> ثم أنشئها.</p>		
<p><b>تمرين 5:</b> <math>ABC</math> مثلث حيث <math>AB=6</math> و <math>AC=4</math> و <math>BC=5</math>. <math>G</math> مركز ثقل المثلث <math>ABC</math>.</p> <p>1) حدد و أنشئ <math>(')</math> مجموعة النقط <math>M</math> التي تحقق: <math>\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\  = 6</math></p> <p>2) حدد و أنشئ <math>(\Delta)</math> مجموعة النقط <math>M</math> التي تحقق: <math>\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\  = \ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\ </math></p> <p>3) حدد و أنشئ <math>(L)</math> مجموعة النقط <math>M</math> التي تحقق: <math>\ \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\  = \ \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\ </math></p>		

سلسلة 3	المرجح حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية
<p><b>تمرين 1:</b> <math>ABCD</math> رباعي محدب. <math>E</math> و <math>F</math> هما على التوالي مركزا ثقل المثلثين <math>ABC</math> و <math>ADC</math></p>		
<p>لدينا <math>F</math> مركز ثقل المثلث <math>ADC</math> أي مرجح النقط <math>(A,1)</math> و <math>(D,1)</math> و <math>(C,1)</math> إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: <math>(*) \forall M \in (P) \overrightarrow{MF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}</math></p>	<p>لدينا <math>E</math> مركز ثقل المثلث <math>ABC</math> أي مرجح النقط <math>(A,1)</math> و <math>(B,1)</math> و <math>(C,1)</math> إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: <math>(*) \forall M \in (P) \overrightarrow{ME} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}</math></p>	
<p>نأخذ في المتساوية <math>(*)</math>: <math>M = E</math> فنجد أن: <math>\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EC})</math> وبما أن <math>E</math> مرجح النقط <math>(A,1)</math> و <math>(B,1)</math> و <math>(C,1)</math> فإن <math>\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}</math> أي <math>\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DE}</math> منه: <math>\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}</math> بالتالي: <math>(EF) \parallel (BD)</math></p> <p> الشكل غير ضروري لكنه يساعد في إيجال الفكرة أحيانا.</p>		
<p><b>تمرين 2:</b> <math>ABC</math> مثلث. <math>E</math> و <math>I</math> و <math>F</math> نقط حيث <math>\overrightarrow{AE} = \frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}</math> و <math>I</math> منتصف <math>[BC]</math> و <math>\overrightarrow{CF} = \frac{7}{9}\overrightarrow{CA}</math></p>		
<p>لدينا <math>\overrightarrow{AE} = \frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}</math> منه: <math>5\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB}</math> منه: <math>5\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}</math> منه: <math>5\overrightarrow{AE} + 2(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = \vec{0}</math> منه: <math>5\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}</math> منه: <math>7\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}</math> منه: <math>-7\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}</math> هذا يعني أن <math>E</math> مرجح النقطتين <math>(A,-7)</math> و <math>(B,2)</math> لدينا <math>I</math> منتصف <math>[BC]</math> إذن <math>I</math> مرجح النقطتين <math>(B,1)</math> و <math>(C,1)</math> لدينا <math>\overrightarrow{CF} = \frac{7}{9}\overrightarrow{CA}</math> منه <math>9\overrightarrow{CF} = 7\overrightarrow{CA}</math> منه: <math>9\overrightarrow{CF} - 7\overrightarrow{CA} = \vec{0}</math> منه: <math>9\overrightarrow{CF} - 7(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FA}) = \vec{0}</math> منه: <math>9\overrightarrow{CF} - 7\overrightarrow{CF} - 7\overrightarrow{FA} = \vec{0}</math> منه: <math>2\overrightarrow{CF} - 7\overrightarrow{FA} = \vec{0}</math> منه: <math>-2\overrightarrow{FC} - 7\overrightarrow{FA} = \vec{0}</math> هذا يعني أن <math>E</math> مرجح النقطتين <math>(C,-2)</math> و <math>(A,-7)</math> (أو أيضا <math>(C,2)</math> و <math>(A,7)</math> خاصية الصمود)</p>	<p>1</p>	
<p>لدينا <math>E</math> مرجح <math>(A,-7)</math> و <math>(B,2)</math> إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: <math>\forall M \in (P) \overrightarrow{ME} = \frac{-7}{-5}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{-5}\overrightarrow{MB}</math> لدينا <math>F</math> مرجح <math>(C,2)</math> و <math>(A,7)</math> إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: <math>\forall M \in (P) \overrightarrow{MF} = \frac{2}{9}\overrightarrow{MC} + \frac{7}{9}\overrightarrow{MA}</math> نأخذ: <math>M = I</math> فنجد أن: <math>\overrightarrow{IE} = \frac{7}{5}\overrightarrow{IA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{IB}</math> و <math>\overrightarrow{IF} = \frac{2}{9}\overrightarrow{IC} + \frac{7}{9}\overrightarrow{IA}</math> ولدينا <math>I</math> منتصف <math>[BC]</math> منه: <math>\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}</math> منه: <math>\overrightarrow{IF} = \frac{-2}{9}\overrightarrow{IB} + \frac{7}{9}\overrightarrow{IA}</math> إذن: <math>9\overrightarrow{IF} = -2\overrightarrow{IB} + 7\overrightarrow{IA}</math> و <math>5\overrightarrow{IE} = 7\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}</math> منه: <math>9\overrightarrow{IF} = 5\overrightarrow{IE}</math> أي <math>\overrightarrow{IF} = \frac{5}{9}\overrightarrow{IE}</math> بالتالي: النقط <math>E</math> و <math>I</math> و <math>F</math> مستقيمية.</p>	<p>2</p>	
<p><b>تمرين 3:</b> <math>A(3,4)</math> و <math>B(0,2)</math> و <math>C(3,2)</math>. <math>E</math> منتصف <math>[BC]</math> و <math>G</math> مرجح النقطتين <math>(E,2)</math> و <math>(A,1)</math></p>		
<p>لدينا <math>E</math> منتصف <math>[BC]</math> منه: <math>E\left(\frac{3}{2}; 2\right)</math></p>	<p>1</p>	

لدينا  $G$  مرجح  $(E, 2)$  و  $(A, 1)$  منه :  

$$G\left(2; \frac{8}{3}\right) : \text{منه} \begin{cases} x_G = \frac{2x_E + x_A}{3} = \frac{3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{2y_E + y_A}{3} = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$$

لدينا  $\overrightarrow{OG}\left(2; \frac{8}{3}\right)$  و  $\overrightarrow{OE}\left(\frac{3}{2}; 2\right)$  ولدينا :  

$$\det(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OE}) = \begin{vmatrix} 2 & \frac{8}{3} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - \frac{8}{3} \times \frac{3}{2} = 4 - 4 = 0$$

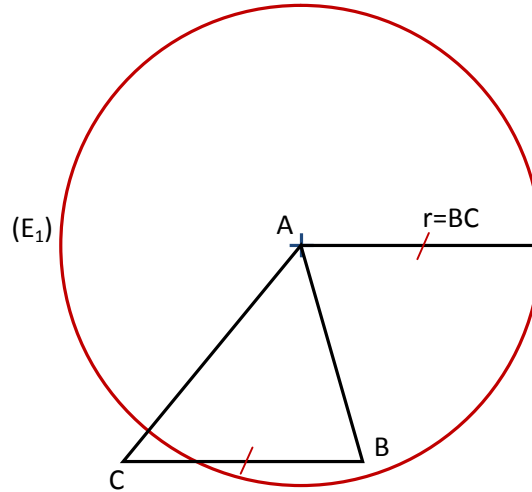
بالتالي :  $O$  و  $G$  و  $C$  مستقيمية.

تذكير: إحداثيات مرجح  $(A, r)$  و  $(B, s)$  و ... و  $(K, t)$  هي :  

$$\begin{cases} x_G = \frac{r x_A + s x_B + \dots + t x_K}{r + s + \dots + t} \\ y_G = \frac{r y_A + s y_B + \dots + t y_K}{r + s + \dots + t} \end{cases}$$

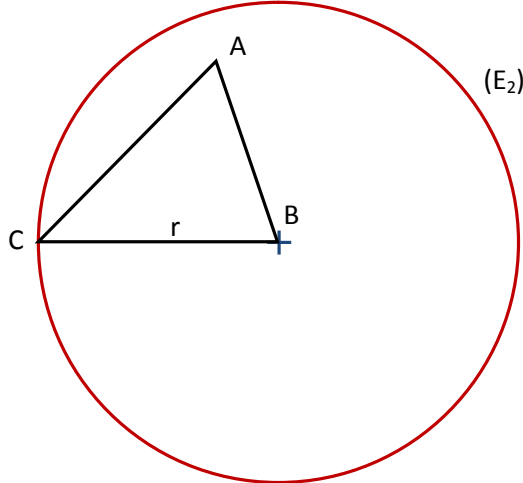
تمرين 4 :  $ABC$  مثلث.

لنحدد مجموعة النقط  $M$  التي تحقق :  $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$   
 لدينا :  $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$  تعني :  $AM = BC$  إذن المجموعة  $(E_1)$  هي الدائرة التي مركزها  $A$  و شعاعها  $R = BC$



1

لنحدد مجموعة النقط  $M$  التي تحقق :  $\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|$   
 لدينا :  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$  منه :  $\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$  أي :  $BM = BC$   
 بالتالي المجموعة  $(E_2)$  هي الدائرة التي مركزها  $B$  و شعاعها  $R = BC$



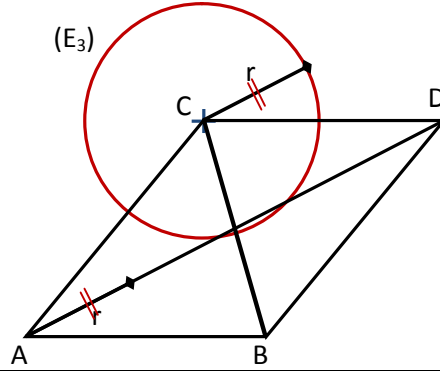
2

لنحدد مجموعة النقط  $M$  التي تحقق :  $\|\overrightarrow{4CM}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$   
 نعتبر النقطة  $D$  حيث  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$  (أي  $ABDC$  متوازي أضلاع)

3

منه :  $\|4\overline{CM}\| = \|\overline{AD}\|$  أي :  $4CM = AD$  أي :  $CM = \frac{AD}{4}$

بالتالي المجموعة ( $E_3$ ) هي الدائرة التي مركزها  $C$  وشعاعها  $R = \frac{AD}{4}$



**تمرين 5 :** مثلث  $ABC$  ،  $AB = 6$  ،  $AC = 4$  ،  $BC = 5$  . مركز ثقل المثلث  $ABC$  .

لنحدد ( $'$ ) مجموعة النقط  $M$  التي تحقق :  $\|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = 6$

نعتبر النقطة  $G$  مرجح النقط ( $A,1$ ) و ( $B,1$ ) و ( $C,1$ ) (أي مركز ثقل المثلث  $ABC$ )

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح  $\forall M \in (P) 3\overline{MG} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}$

منه :  $\|3\overline{MG}\| = 6$  أي  $3MG = 6$  أي  $MG = 2$

بالتالي ( $'$ ) هي الدائرة التي مركزها  $G$  وشعاعها  $r = 2$

لنحدد ( $\Delta$ ) مجموعة النقط  $M$  التي تحقق :  $\|\overline{MA} + \overline{MB}\| = \|\overline{MB} + \overline{MC}\|$

نعتبر النقطة  $I$  مرجح النقط ( $A,1$ ) و ( $B,1$ ) (أي منتصف  $[AB]$ )

والنقطة  $J$  مرجح النقط ( $B,1$ ) و ( $C,1$ ) (أي منتصف  $[BC]$ )

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح  $\forall M \in (P) 2\overline{MI} = \overline{MA} + \overline{MB}$  و  $\forall M \in (P) 2\overline{MJ} = \overline{MB} + \overline{MC}$

منه :  $\|2\overline{MI}\| = \|2\overline{MJ}\|$  أي  $2MI = 2MJ$  أي  $MI = MJ$

بالتالي ( $\Delta$ ) هو واسط القطعة  $[IJ]$

لنحدد ( $L$ ) مجموعة النقط  $M$  التي تحقق :  $\|\overline{MA} + 3\overline{MB}\| = \|\overline{MB} - \overline{MC}\|$

نعتبر النقطة  $G$  مرجح النقطتين ( $A,1$ ) و ( $B,3$ )

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح  $\forall M \in (P) 4\overline{MG} = \overline{MA} + 3\overline{MB}$

منه :  $\|4\overline{MG}\| = \|\overline{MB} + \overline{CM}\|$  أي  $\|4\overline{MG}\| = \|\overline{CB}\|$  أي  $4MG = \frac{BC}{2}$

بالتالي ( $L$ ) هي الدائرة التي مركزها  $G$  وشعاعها  $r = \frac{BC}{2}$

لم يتم رسم الأشكال نظرا لكوننا تطرقنا لها في التمرين السابق.

لاحظ أننا ستعمل المرجح لكي يتم تبسيط المجموع المتجهي داخل رمز المنظم، لكن وفي حال كان مجموع المعاملات

منعدما (كما هو الحال في المثال الأخير فإنه يكون ممكنا تبسيط هذا التعبير دون استعمال المرجح)