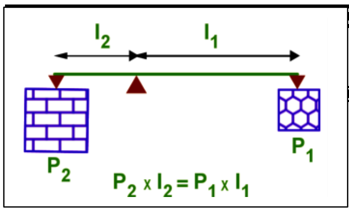
تمارين : المرجح في المستوى

01

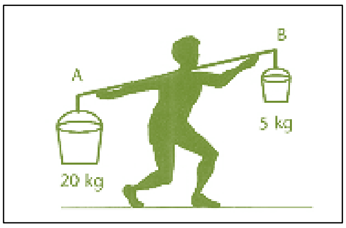


قانون أرخميدس: عَتَلَةٌ (levier) كتلتها مهملة توجد في توازن أفقي على جَذْرٍ وَتِدِي G (un pivot) عندما يكون $P_1 \times \ell_1 = P_2 \times \ell_2$

قضيب حديدي متجانس طوله 2 m في طرفه A نضع سطل من الماء حمولته 20kg وطرفه B سطل من الماء حمولته 5kg (انظر الشكل)

1. أ- حدد النقطة G_1 من القضيب التي يضع عليها الشخص كتفه لكي يكون توازن أثناء حمله للقضيب و سطلين .

ب- حدد a و b حيث $a\overrightarrow{G_1A}+b\overrightarrow{G_1B}=\vec{0}$.



2. نفترض أن القضيب في توازن على كتف الشخص في النقطة G_2 على بعد 80 cm من الطرف A المثبت عليه السطل ل 20 kg .

أ- ما هو وزن السطل المثبت في الطرف B. ب - حدد 'a و 'b حيث $a'\overrightarrow{G_2A}+b'\overrightarrow{G_2B}=\vec{0}$.

3. في هذه الحالة يضع كتفه في النقطة G_3 من القضيب على بعد 50 cm من A . حدد الوزنين المثبتين في A و B و يحقق التوازن.

02

ABCD متوازي أضلاع مركزه O . M و N نقطتان حيث : $3\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$: (1) و $\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}$: (2) .

1. عبر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ باستعمال (1). أنشئ M .

2. أوجد a و b من $\mathbb{R}$ حيث تكون M مرجح النقطتين المتزنتين (A,a) و (B,b) .

3. عبر عن $\overrightarrow{CN}$ بدلالة $\overrightarrow{CD}$ باستعمال (2). أنشئ N .

4. أوجد 'a و 'b من $\mathbb{R}$ حيث تكون N مرجح النقطتين المتزنتين (C,a') و (D,b') .

5. بين أن : NCMA متوازي أضلاع و O منتصف $[MN]$.

03

ليكن G مرجح النقط المتزنة $(A,1)$; $(B,-1)$; $(C,2)$ و $(D,3)$.

1. ماهي العلاقة المتجهية التي يمكن كتابتها ؟

2. لتكن J مرجح $(A,1)$ و $(C,2)$. K مرجح $(B,-1)$ و $(D,3)$. بين أن : $3\overrightarrow{GJ}+2\overrightarrow{GK}=\vec{0}$. أنشئ النقط J , K و G

3. أنشئ L مرجح النقط المتزنة $(A,1)$; $(B,-1)$ و $(C,2)$. بين أن : $2\overrightarrow{GL}+3\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. استنتج طريقة أخرى لإنشاء G.

04

نعتبر في المستوى الإقليدي (P) مثلثا ABC متساوي الأضلاع $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. أنشئ الشكل.

1. أ - بين أن النقطة G مرجح النظمة المتزنة $\{(C;-1);(B;1);(A;2)\}$. ب - بين أن المستقيمين (AG) و (BG) متعامدان.

2. لنعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ و G_1 مرجح النظمة المتزنة $\{(C;-1);(B;1);(A;2).(D;4)\}$. بين أن: $\overrightarrow{GG_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GD}$

ثم أنشئ D و G_1.

3. نأخذ المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $A(2,3)$; $B(-2,1)$; $C(1,1)$ و $D(-1,2)$.

أ- حدد (a,b) زوج إحداثيتي G في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. ب - حدد (c,d) زوج إحداثيتي G_1 في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

تمرين 1..

1 أ نحدد G_1

النقطة G_1 توجد على القضيب وتحقق التوازن

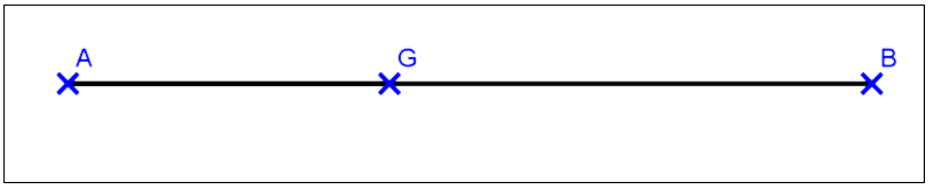
إذن حسب قانون ارخميدس $20AG_1 = 5BG_1$

ولدينا : $AG_1 + BG_1 = 2 \Leftrightarrow BG_1 = 2 - AG_1$

$$20AG_1 = 5(2 - AG_1)$$

$$25AG_1 = 10$$

$$AG_1 = \frac{2}{5}m$$



ب نحدد a و b حيث $a\overrightarrow{G_1A} + b\overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$

لدينا : $AG_1 = 40cm$ و $BG_1 = 160cm$

إذن : $BG_1 = 4AG_1$

بما أن $G_1 \in [AB]$ فإن $\overline{BG_1} = 4\overline{G_1A}$

$$\overrightarrow{BG_1} = 4\overrightarrow{G_1A} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$$

$$\left(k \in \mathbb{R}^*\right) \quad 4k\overrightarrow{G_1A} + k\overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$$

وبالتالي : G_1 مرجح $(A,4k)$ و (B,k)

لدينا : $AG_1 = 40cm$ و $BG_1 = 160cm$

نأخذ $k = 5$ إذن G_1 مرجح $(A,20)$ و $(B,5)$

ومنه : $20\overrightarrow{G_1A} + 5\overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$

خلاصة: a=20 و b=5

2– أ نبحث عن وزن السطل المثبت في الطرف B

لدينا : $P_A l_A = P_B l_B \Leftrightarrow P_B = \frac{P_A . l_A}{l_B}$

لدينا : $l_A = 0,8$ و $P_A = 20$ و $l_B = 1,2$

إذن : $P_B = \frac{20 \times 0,8}{1,2} = \frac{40}{3}$

خلاصة: وزن السطل المثبت في الطرف B هو $\frac{40}{3}$.

ب نحدد a' و b' حيث : $a'\overrightarrow{G_2A} + b'\overrightarrow{G_2B} = \vec{0}$

لدينا : G_2 مرجح $(A,20)$ و $(B,\frac{40}{3})$

إذن : $20\overrightarrow{G_2A}+\frac{40}{3}\overrightarrow{G_2B}=\vec{0}$

خلاصة: $a'=20$ و $b'=\frac{40}{3}$.

3 نحدد الوزنين

لدينا : $AG_3 = 50\text{ cm}$ و $AB=200\text{ cm}$

إذن : $AG_3=\frac{1}{4}AB$

ومنه : $\overrightarrow{AG_3}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AG_3}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG_3}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AG_3}+\frac{1}{4}\overrightarrow{G_3B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\overrightarrow{AG_3}-\overrightarrow{AG_3}+\frac{1}{4}\overrightarrow{G_3B}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{G_3A}+\frac{1}{4}\overrightarrow{G_3B}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{G_3A}+\overrightarrow{G_3B}=\vec{0}$$

ومنه : $3k\overrightarrow{G_3A}+k\overrightarrow{G_3B}=\vec{0}$

خلاصة: $(A,3k)$ و (B,k) .

تمرين...2

1 نعبر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

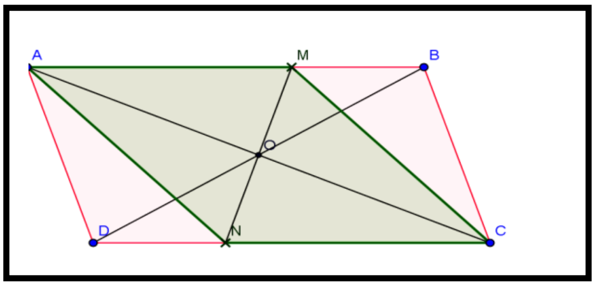
لدينا :

$$3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

خلاصة: $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

- ننشئ M



2 نحدد $\overrightarrow{AM}$ عن بدلالة $\overrightarrow{AB}$. a و b حيث : M مرجح (A,a) و (B,b)

لدينا :

$$3\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

ومنه : M مرجح (B,b) و (A,a)

خلاصة: $a=1$ و $b=2$.

3 نحدد $\overrightarrow{CN}$ عن بدلالة $\overrightarrow{CD}$

لدينا :

$$\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DC}+3\overrightarrow{CN}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CD}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

خلاصة: $\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

- ننشئ N (انظر الشكل السابق)

4 نحدد a' و b' حيث : N مرجح (C,a') و (D,b')

لدينا :

$$\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CN}+\overrightarrow{ND}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{NC}-2\overrightarrow{ND}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NC}+2\overrightarrow{ND}=\vec{0}$$

ومنه : N مرجح $(C,1)$ و $(D,2)$.

خلاصة: $a'=1$ و $b'=2$

5 نبين أن : NCMA متوازي الاضلاع و O منتصف $[MN]$.

لدينا : M مرجح (B,b) و (A,a)

تمرين 3

1 نعطي العلاقة المتجهية

لدينا : $1-1+3=5\neq 0$ و G مرجح $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ و $(D,3)$

إذن : $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}+3\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

2 نبين أن : $3\overrightarrow{GJ}+2\overrightarrow{GK}=\vec{0}$

لدينا :

- G مرجح $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ و $(D,3)$

- J مرجح $(A,1)$ و $(C,2)$
- K مرجح $(B,-1)$ و $(D,3)$

إذن : حسب خاصية التجميعية G مرجح $(J,3)$ و $(K,2)$.

و منه : $3\overrightarrow{GJ}+2\overrightarrow{GK}=\vec{0}$

ننشئ : G و J و K.

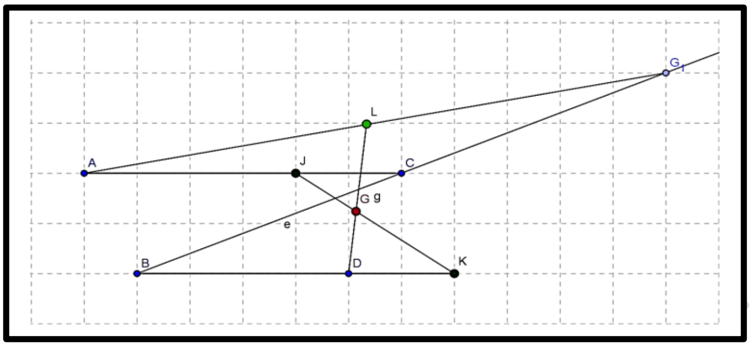
لدينا :

J مرجح $(A,1)$ و $(C,2)$ إذن : $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

K مرجح $(B,-1)$ و $(D,3)$ إذن : $\overrightarrow{BK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BD}$

G مرجح $(A,1)$ و $(B,-1)$ إذن : $\overrightarrow{JG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{JK}$

و منه : $3\overrightarrow{GJ}+2\overrightarrow{GK}=\vec{0}$



3 ننشئ L

ننشئ G_1 مرجح $(B,-1)$ و $(C,2)$ ($\overrightarrow{BG_1}=2\overrightarrow{BC}$)

إذن : حسب خاصية التجميعية L مرجح $(G_1,1)$ و $(A,1)$

ومنه : L منتصف $[AG_1]$ (انظر الشكل السابق) .

- نبين أن : $2\overrightarrow{GL}+3\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

G مرجح $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ و $(D,3)$.

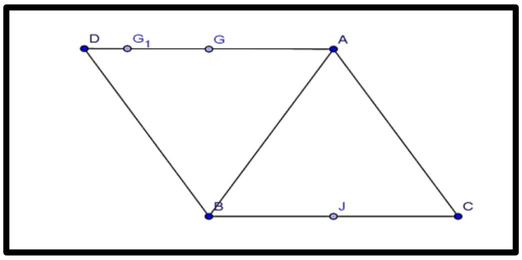
إذن : حسب خاصية التجميعية G مرجح $(D,3)$ و $(L,2)$.

ومنه : $2\overrightarrow{GL}+3\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

نستنتج طريقة أخرى لإنشاء L .

(حسب ما سبق) $\overrightarrow{GL}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{GD} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GL}+3\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (انظر الشكل) .

تمرين...4



1 أ نبين أن : G مرجح $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,-1)$.

لدينا :

$$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{GC}$$
$$=2(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CB}$$
$$=\vec{0}$$

خلاصة: G مرجح $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,-1)$.

ب نبين أن : $(AG)\perp(BG)$

لدينا : $(AG)\parallel(BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. $(AG)\parallel(BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

نعتبر J منتصف $[BC]$ إذن : $(AJ)\perp(BC)$ ومنه : $(AJ)\perp(AG)$ (1)

لدينا : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{JB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (2) .

من خلال (1) و (2) نستنتج أن : AGBJ مستطيل

خلاصة: $(AG)\perp(BG)$

2 نبين أن : $\overrightarrow{GG_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GD}$.

لدينا :

G مرجح $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,-1)$.

و G_1 مرجح $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$ و $(D,4)$.

إذن حسب خاصية التجميعية : G_1 مرجح $(G,2)$ و $(D,4)$.

إذن : $2\overrightarrow{G_1G}+4\overrightarrow{G_1D}=\vec{0}$.

ومنه :

$$2\overrightarrow{G_1G}+4\overrightarrow{G_1D}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_1G}+4\overrightarrow{G_1G}+4\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{GG_1}=4\overrightarrow{GD}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GD}$$

خلاصة: $\overrightarrow{GG_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GD}$.

ننشئ : G_1 و D .

لدينا : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{GG_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GD}$ (انظر الشكل السابق) .

3 نحدد زوج احداثيتي $G(a,b)$

لدينا :

G مرجح $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,-1)$.

$b=\frac{6+1-1}{2}=3$ و $a=\frac{4-2-1}{2}=\frac{1}{2}$

خلاصة: $G(\frac{1}{2},3)$

نحدد زوج احداثيتي $G_1(a',b')$.

لدينا :

G_1 مرجح $(G,2)$ و $(D,4)$.

ومنه : $b'=\frac{6+8}{6}=\frac{7}{3}$ و $a'=\frac{1-4}{6}=\frac{-1}{2}$

خلاصة: $G_1(\frac{-1}{2},\frac{7}{3})$