السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليـــــــــــــات	سلسلة 2

تمرين 1 : نعتبر المتتاليتين العددية (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \quad ; n \geq 0 \end{cases}$ و $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$

1) بين أن (v_n) متتالية حسابية محددا أساسها وحدها الأول

2) استنتج حساب u_n بدلالة n

3) احسب $S = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

تمرين 2 :

نعتبر المتتاليتين العددية (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 , u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n \quad ; n \geq 0 \end{cases}$ و $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية.

2) بين أن : $v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = u_n - u_0$

3) استنتج الحد العام للمتتالية (u_n)

4) احسب $S = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2$

تمرين 3 :

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$

1) نعتبر المتتالية : $w_n = v_n - u_n$

أ) بين أن (w_n) متتالية هندسية محددا أساسها

ب) أوجد الحد العام للمتتالية (w_n)

2) نعتبر المتتالية : $t_n = 3u_n + 2v_n$

أ) بين أن (t_n) متتالية ثابتة.

ب) أوجد الحد العام للمتتالية (t_n)

3) استنتج مما سبق تعبير كل من (u_n) و (v_n) بدلالة n .

تمرين 4 :

نعتبر المتتاليتين العددية (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \ ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \ ; n \geq 0 \end{cases}$

و المتتاليتين : $w_n = v_n - u_n$ و $t_n = 3u_n + 10\ v_n$

1) بين أن (w_n) متتالية هندسية ثم أوجد حدها العام.

2) بين أن (t_n) متتالية ثابتة ثم أوجد حدها العام.

3) أوجد الحد العام لكل من (u_n) و (v_n) .

تمرين5 : ليكن a و b عددين حقيقين حيث : $0 < a < b$

نعتبر المتتاليتين العددية (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \ ; n \geq 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \ ; n \geq 0 \end{cases}$

1) بين أن $\forall n \in IN \ \ 0 < u_n < v_n$

2) ادرس رتابة (u_n) و (v_n)

3) بين أن : $\forall n \in IN \ \ u_n v_n = ab$

4) استنتج أن : $\forall n \in IN \ \ u_n < \sqrt{ab} < v_n$

5) نضع : $\forall n \in IN \ \ w_n = v_n - u_n$.

أ) بين أن : $\forall n \in IN \ \ 0 < w_{n+1} < \dfrac{1}{2} w_n$

ب) ثم استنتج أن : $\forall n \in IN^* \ \ 0 < w_n \leq (b-a)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

6) نأخذ: $a = 1$ و $b = 2$ ، أوجد قيمة n لكي تكون u_n قيمة مقربة بتفريط و v_n قيمة مقربة بإفراط للعدد $\sqrt{2}$ إلى 10^{-4}

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليـــــــات حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \quad ; n \geq 0 \end{cases}$ ، $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$

1

لدينا :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\dfrac{9}{6-u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\dfrac{9-3(6-u_n)}{6-u_n}} - \frac{1}{u_n-3}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{6-u_n}{9-18+3u_n} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{6-u_n}{3(-3+u_n)} - \frac{3}{3(u_n-3)} = \frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)} = \frac{3-u_n}{3(u_n-3)} = \frac{-1}{3}$$

بالتالي (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{-1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 3} = \dfrac{1}{-4} = \dfrac{-1}{4}$

2

لدينا حسب السؤال السابق : $v_n = v_0 + rn = \dfrac{-1}{4} - \dfrac{1}{3} n = \dfrac{-4n-3}{12}$

لدينا: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$: منه $u_n - 3 = \dfrac{1}{v_n}$ منه : $\boxed{u_n = \dfrac{1}{v_n} + 3 = \dfrac{-12}{4n+3} + 3 = \dfrac{-12+12n+9}{4n+3} = \dfrac{12n-3}{4n+3}}$

3

$$\boxed{S = v_0 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} \times n = \frac{\dfrac{-1}{4} + \dfrac{-4(n-1)-3}{12}}{2} \times n = \frac{\dfrac{-3-4n+4-3}{12}}{2} \times n = \frac{-n(2n+1)}{12}}$$

تمرين 2 : $\begin{cases} u_0 = 1 , u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2} u_{n+1} - \dfrac{1}{2} u_n \quad ; n \geq 0 \end{cases}$ ، $v_n = u_{n+1} - u_n$

1

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2} v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 1 = 3$

2

لدينا $\forall n \in IN \quad v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n = u_n - u_0$

3

لدينا حسب السؤال السابق : $u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \ldots + v_{u-1} = v_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = 3 \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 6\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$

إذن : $\boxed{u_n = 6\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) + u_0 = 6 - \dfrac{6}{2^n} + 1 = 7 - \dfrac{6}{2^n}}$

4

نعتبر المتتالية $w_n = v_n^2$ ، لدينا : $\forall n \in IN \quad w_{n+1} = v_{n+1}^2 = \left(\dfrac{1}{2} v_n\right)^2 = \dfrac{1}{4} v_n^2 = \dfrac{1}{4} w_n$

إذن : $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$ و حدها الأول : $w_0 = 9$

منه: $S = v_0^2 + v_1^2 + \ldots + v_n^2 = w_0 + w_1 + \ldots + w_n = w_0 \dfrac{1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{36}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}\right) = 12 - \dfrac{3}{4^n}$

لحساب مجموع متتالية غالبا ما نحدد طبيعتها أولا كالسؤال 4 أو قد نستعمل تبسيطا كالسؤال 2.

تمرين 3 :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \ ; \ n \geq 0 \end{cases} \quad ، \quad w_n = v_n - u_n \quad ، \quad t_n = 3u_n + 2v_n$$

1

أ) لدينا : $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{4u_n + 2v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \dfrac{u_n - v_n}{6} = \dfrac{w_n}{6}$

إذن $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{6}$ و حدها الأول $w_0 = 1 - 7 = -6$

ب) $w_n = w_0 \, q^n = -6 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n = \dfrac{-1}{6^{n-1}}$

2

أ) لدينا : $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 2v_{n+1} = 2u_n + v_n + u_n + v_n = 3u_n + 2v_n = t_n$ ، بالتالي : $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة

ب) بما أن $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة: $\forall n \in IN \quad t_n = t_0 = 3u_0 + 2v_0 = 3 + 14 = 17$

3

لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases} u_n - v_n = w_n \\ 3u_n + 2v_n = t_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_n - 2v_n = 2w_n \\ 3u_n - 3v_n = 3w_n \\ 3u_n + 2v_n = t_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5u_n = 2w_n + t_n \\ 5v_n = t_n - 3w_n \end{cases}$

بالتالي:
$$\boxed{\forall n \in IN \quad \begin{cases} u_n = \dfrac{2w_n + t_n}{5} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{-2}{6^{n-1}} + 17\right) \\ v_n = \dfrac{t_n - 3w_n}{5} = \dfrac{1}{5}\left(17 + \dfrac{3}{6^{n-1}}\right) \end{cases}}$$

يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض الصيغ المحصل عليها (يمكنك أيضا حساب بعض القيم الخاصة للتحقق من صحة النتائج مثل u_0 و v_0)

تمرين 4 :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \ ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \ ; n \geq 0 \end{cases} \quad ، \quad w_n = v_n - u_n \quad ، \quad t_n = 3u_n + 10\,v_n$$

1

لدينا :
$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 12v_n - 5u_n - 10v_n}{15} = \frac{2v_n - 2u_n}{15} = \frac{2(v_n - u_n)}{15} = \frac{2}{15} w_{n+1}$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \dfrac{2}{15}}$ و حدها الأول $\boxed{w_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1}$

منه : $\boxed{\forall n \in IN \quad w_n = w_0 \times q^n = \left(\dfrac{2}{15}\right)^n}$

2

لدينا : $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2(u_n + 4v_n) = u_n + 2v_n + 2u_n + 8v_n = 3u_n + 10v_n = t_n$

إذن (w_n) متتالية ثابتة، منه : $\boxed{\forall n \in IN \quad t_n = t_0 = 3u_0 + 10v_0 = 3 + 20 = 23}$

3

لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases} v_n - u_n = w_n \\ 3u_n + 10v_n = t_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 3u_n + 10(w_n + u_n) = t_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 3u_n + 10w_n + 10u_n = t_n \end{cases}$

منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 13u_n = t_n - 10w_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + \dfrac{t_n - 10w_n}{13} \\ u_n = \dfrac{t_n - 10w_n}{13} \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = \dfrac{t_n + 3w_n}{13} = \dfrac{23 + 3\left(\dfrac{2}{15}\right)^n}{13} \\ u_n = \dfrac{t_n - 10w_n}{13} = \dfrac{23 - 10\left(\dfrac{2}{15}\right)^n}{13} \end{cases}$

تمرين5 : $0<a<b$ ، $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \; ; n \geq 0 \end{cases}$ ، $\begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \; ; n \geq 0 \end{cases}$ ، $\forall n \in IN \quad w_n = v_n - u_n$

1	سنستعمل برهانا بالترجع. بالنسبة لـ $n=0$ ، العبارة صحيحة لأن : $u_0 = a$ و $v_0 = b$ و $0<a<b$ نفترض أن : $0<u_n<v_n$ ونبين أن : $0<u_{n+1}<v_{n+1}$ لدينا : $0<u_n<v_n \Rightarrow \begin{cases} 2u_n v_n > 0 \\ u_n + v_n > 0 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} > 0$ و لدينا : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \dfrac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} > 0$ إذن : $v_{n+1} > u_{n+1} > 0$ ، بالتالي : $\forall n \in IN \quad 0<u_n<v_n$
2	لدينا لكل $n \in IN$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = u_n\left(\dfrac{2v_n}{u_n + v_n} - 1\right) = u_n \dfrac{v_n - u_n}{u_n + v_n} > 0$ و $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} < 0$ ، إذن : (u_n) تزايدية قطعا و (v_n) تناقصية قطعا.
3	سنستعمل برهانا بالترجع. بالنسبة لـ $n=0$ ، العبارة صحيحة لأن : $u_0 v_0 = ab$. نفترض أن : $u_n v_n = ab$ ، لدينا: $u_{n+1} v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \times \dfrac{u_n + v_n}{2} = u_n v_n = ab$ ، بالتالي : $\forall n \in IN \quad u_n v_n = ab$
4	لدينا لكل $n \in IN$: $0<u_n<v_n \Rightarrow \begin{cases} 0<u_n^2<v_n u_n \\ 0<u_n v_n<v_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<u_n^2<ab \\ 0<ab<v_n^2 \end{cases} \Rightarrow u_n < \sqrt{ab} < v_n$
5	أ) لدينا حسب السؤال 1 $v_n > u_n$ ، إذن : $w_n = v_n - u_n > 0$ $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)} = \dfrac{(v_n - u_n)}{2} \times \dfrac{v_n - u_n}{u_n + v_n} = \dfrac{w_n}{2}\left(\dfrac{v_n + u_n - 2u_n}{u_n + v_n}\right) = \dfrac{w_n}{2}\left(1 - 2\dfrac{u_n}{u_n + v_n}\right) < \dfrac{w_n}{2}$ بالتالي : $\forall n \in IN \quad 0 < w_{n+1} < \dfrac{1}{2} w_n$ ب) لدينا حسب السؤال السابق لكل $n \in IN$: $\begin{cases} 0<w_1<\dfrac{1}{2}w_0 \\ 0<w_2<\dfrac{1}{2}w_1 \\ .... \\ 0<w_n<\dfrac{1}{2}w_{n-1} \end{cases}$ بضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف و بعد الاختزال نجد: $0<w_n \leq w_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ أي $0<w_n \leq (b-a)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

6	بأخذ $a=1$ و $b=2$ نستنتج أن : $\forall n\in IN \quad u_n<\sqrt{2}<v_n$ و $0<w_n\le \frac{1}{2^{n-1}}$ لكي تكون u_n قيمة مقربة بتفريط و v_n قيمة مقربة بإفراط للعدد $\sqrt{2}$ إلى 10^{-4}، يجب أن يكون $v_n-u_n=w_n\le 10^{-4}$ ولتحقق ذلك يكفي أن يكون: $\frac{1}{2^{n-1}}\le 10^{-4}$ أي $2^{n-1}\ge 10000$ أي $2^{n}\ge 20000$ وباستعمال آلة حاسبة وحساب قيم 2^n من أجل قيم صحيحة طبيعية (1، 2، ...)سنجد أنه يكفي أن يكون $n\ge 15$	

- في السؤال 3 يمكن إثبات أن المتتالية $x_n=u_nv_n$ ثابتة ثم الاستنتاج.
- في السؤال 5ـ ب يمكن استعمال برهان بالترجع
- في السؤال الأخير إيجاد قيم العدد n يمكنه إيجاده باستعمال دالة اللوغاريتم النبيري أو اللوغاريتمي (التي تدرس في السنة الثانية بكالوريا) كما يلي $2^n\ge 20000$ تكافئ $\log_{10}\left(2^{n-1}\right)\ge\log_{10}(10000)$ تكافئ $(n-1)\log_{10}(2)\ge 4$ تكافئ $n\ge\frac{4}{\log_{10}(2)}+1$ ، و باستعمال آلة حاسبة نجد: $\frac{4}{\log_{10}(2)}+1\approx 14,2$ وهذا يعني أن $n\ge 15$