السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات العددية	سلسلة 3

تمرين 1 : بين أن كل متتاليتين مما يلي متحاذيتان:

1) $u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

2) $u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$

تمرين 2 : نعتبر المتتاليتين : $\begin{cases} u_0 = a \ ; \ v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n+v_n} \quad , \quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$ حيث $b > a > 0$

1) بين أن : $0 < u_n \le v_n \quad \forall n \in IN$

2) أدرس رتابة u_n و v_n

3) أثبت أن : $\forall n \in IN \quad 0 \le v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

4) بين أن : $\forall n \in IN \quad 0 \le v_n - u_n \le \frac{1}{2^n}(b-a)$

5) أثبت أن u_n و v_n متقاربتان

6) نضع : $w_n = u_n \, v_n$

أ) أدرس رتابة w_n

ب) حدد نهاية كل من u_n و v_n

تمرين 3 : نعتبر المتتاليتين : $u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$

1) بين أن u_n و v_n متقاربتان

2) نضع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ و نفترض أن ℓ عدد جذري أي $\ell = \frac{p}{q}$ حيث $(p,q) \in IN \times IN^*$

أ) بين أن : $0 < \frac{p}{q} - u_q < \frac{1}{q\,q!}$

ب) بين أن $\frac{p}{q} - u_q$ كسر مقامه $q!$

3) استنتج أن $\ell \notin Q$ (العدد ℓ نرمز له بـ e ويسمى الأساس النبيري)

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات العددية حلول مقترحة	سلسلة 3

تمرين 1 :

1

$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

لدينا : $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ منه $v_n > u_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

و : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ إذن u_n تزايدية قطعا

ولدينا :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{-1}{n(n+1)} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

إذن v_n تناقصية قطعا ، بالتالي u_n و v_n متحاذيتان.

2

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$

لدينا : $v_n - u_n = \frac{1}{n\,n!} > 0$ منه : $v_n > u_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ (لأن $0 < \frac{1}{n\,n!} \leq \frac{1}{n}$)

و : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ إذن u_n تزايدية قطعا

ولدينا :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n\,n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

إذن v_n تناقصية قطعا ، بالتالي u_n و v_n متحاذيتان.

تمرين 2 : $\begin{cases} u_0 = a \;;\; v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad , \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ حيث $b > a > 0$

1

بالنسبة لـ : $n = 0$: $0 < u_0 \leq v_0$ لأن : $b > a > 0$

نفترض أن : $0 < u_n \leq v_n$ منه : $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} > 0$ و $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geq 0$

إذن: $0 < u_{n+1} \leq v_{n+1}$

2

لدينا : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$ إذن v_n تناقصية

لدينا u_n $0 < u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n v_n - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n (v_n - u_n)}{u_n + v_n} > 0$ إذن u_n تزايدية

3

لدينا و $0 < v_{n+1} - u_{n+1} \quad \forall n \in IN$ و $\frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{v_n - u_n} = \frac{u_n - v_n}{2(u_n + v_n)} < \frac{1}{2} \quad \forall n \in IN$

بالتالي $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n) \quad \forall n \in IN$

(سبق وحسبنا الفرق $v_{n+1} - u_{n+1}$ وأيضا $\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} < 1$ لأن البسط أصغر من المقام)

4		لدينا : $0 \le v_1 - u_1 \le \frac{1}{2}\ (v_0 - u_0)$ و $0 \le v_2 - u_2 \le \frac{1}{2}\ (v_1 - u_1)$ و . . . و $0 \le v_n - u_n \le \frac{1}{2}\ (v_{n-1} - u_{n-1})$ بضرب المتفاوتات و الاختزال نجد : $0 \le v_n - u_n \le \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$ أي $0 \le v_n - u_n \le \frac{1}{2^n}(b-a)$
5		لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ (لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}(b-a) = 0$) و v_n تناقصية و u_n تزايدية ، إذن u_n و v_n متقاربتان
6	أ	لدينا : $v_n = w_n$ $v_{n+1} = u_n$ $w_{n+1} = u_{n+1}$ إذن w_n متتالية ثابتة
	ب	لدينا w_n متتالية ثابتة إذن : $w_n = w_0 = ab \quad \forall n \in IN$ ، منه : $u_n v_n = ab \quad \forall n \in IN$ بما أن u_n و v_n متقاربتان نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ من $u_n v_n = ab \quad \forall n \in IN$ نستنتج أن : $\ell^2 = ab$ منه : $\ell = \sqrt{ab}$ أو $\ell = -\sqrt{ab}$ و لكون : $0 < u_n$ فإن : $\ell \ge 0$ بالتالي : $\ell = \sqrt{ab}$
تمرين 3 :		$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$
1		أنظر السؤال الثاني من التمرين الأول
2	أ	نضع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ ونفترض أن ℓ عدد جذري أي $\ell = \frac{p}{q}$ حيث $(p,q) \in IN \times IN^*$ لدينا u_n و v_n متحاذيتان نهايتهما ℓ إذن: $u_n < \ell < v_n \quad \forall n \in IN^*$ منه : $u_q < \ell < v_q$ منه $u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q\,q!}$ منه : $0 < \frac{p}{q} - u_q < \frac{1}{q\,q!}$
	ب	لدينا : $\frac{p}{q} - u_q = \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right) = \frac{p(q-1)! - q! - q! - \frac{q!}{2} - \frac{q!}{3} - \ldots - \frac{q!}{q}}{q!}$ وبما أن $\frac{q!}{k} \in IN \quad \forall k \in \{1 \ldots q\}$ فإن : كسر مقامه $q!$ وبسطه عدد صحيح نسبي
3		لدينا: $\frac{p}{q} - u_q = \frac{a}{q!} \ / a \in Z$ و $0 < \frac{p}{q} - u_q < \frac{1}{q\,q!}$ منه : $0 < \frac{a}{q!} < \frac{1}{q\,q!}$ منه : $0 < qa < 1$ وهذا غير ممكن لأنه لا يوجد عدد صحيح نسبي محصور بين 0 و 1 بالتالي أن $\ell \notin Q$