سلسلة 2	الحسابيات	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : a و b و c أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة. (الأسئلة مستقلة)

1) بين أن : $(a \wedge b)+(a \vee b)=a+b \iff a/b \text{ ou } b/a$

2) بين أن : $(a^2+ab+b^2)\wedge ab=1 \iff a \wedge b=1$

3) بين أن : $c/(a\wedge c)(b\wedge c) \iff c/ab$

4) بين أن : $(a^2-b^2)\wedge(a^3-b^3)=(a-b)$ (حيث $a>b$)

تمرين 2 : n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

1) بين أن : $\forall(a,b)\in IN^2 \quad 15/\ ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

2) بين أن : $\forall n\in IN \quad 42/n^7-n$

3) بين أن : $\forall n\in IN \quad 9/4^n+6n+8$

4) بين أن : $\forall n\in IN \quad 6^n\equiv 1+5n[25]$

تمرين 3 : a و b و c و d أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.

بين أن : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[30]$

تمرين 4 : p عدد أولي أكبر من 2 و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.(السؤالان مستقلان)

1) بين أن : $(n+1)^p\equiv n^p+1\ [2p]$

2) بين أن : $n^{p^2}\equiv n^p\left[p^2\right]$

تمرين 5 : n عدد صحيح طبيعي أكبر من 1 .(السؤالان مستقلان)

1) بين أن العدد : $A_n=n^4+n^2+1$ غير أولي.

2) بين أن التفكيك الأولي للعدد A_n لا يحتوي على العدد 2

3) بين أن : $n\wedge 3=1 \Rightarrow 3/A_n$

تمرين 6 : a و b و x أعداد من IN^* حيث $x>1$ ، نضع : $a\wedge b=d$

1) بين أن : $(x^d-1)/(x^a-1)\wedge(x^b-1)$

2) نعتبر المعادلة : $(E) \quad ax+by=d$

أ) بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x_0,y_0) في Z^2

ب) حل في Z^2 المعدلة (E)

ج) استنتج أن : $\exists(u,v)\in IN^2 \ / \ au-bv=d$

د) تحقق أن : $(x^{au}-1)-(x^{bv}-1)x^d=(x^d-1)$

3) استنتج مما سبق أن : $(x^a-1)\wedge(x^b-1)=(x^{a\wedge b}-1)$

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الحسابيات حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : a و b و c أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة. (الأسئلة مستقلة)

1

نضع: $d = a \wedge b$ منه : $\exists(\sim,\ ) \in IN^2 \ / \begin{cases} a = d\sim \\ b = d \\ \sim \wedge \ = 1 \end{cases}$

و حيث أن : $(a \wedge b).(a \vee b) = ab$ فإن : $d.(a \vee b) = d^2 \sim$ منه: $a \vee b = d\sim$ ، الآن ، لدينا :

$$(a \wedge b) + (a \vee b) = a + b \iff d + d\sim = d\sim + d \iff 1 + \sim = \sim + \iff 1 - \sim + (\sim - 1) = 0$$

$$(a \wedge b) + (a \vee b) = a + b \iff (\sim - 1)(\ -1) = 0 \iff (\sim = 1)\ ou\ (\ = 1) \iff (a/b)\ ou\ (b/a)$$

2

- نفرض أن : $(a^2 + ab + b^2) \wedge ab = 1$ ، نضع : $a \wedge b = d$ منه:

$$\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/ab \\ d/b^2 \\ d/a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/ab \\ d/a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Rightarrow d/(a^2 + ab + b^2) \wedge (ab) \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$$

- نفرض الآن أن : $a \wedge b = 1$ ، إذن : $a \wedge b^2 = 1$ و $a^2 \wedge b = 1$

نضع : $(a^2 + ab + b^2) \wedge a = d$ ، منه :

$$\begin{cases} d/a \\ d/a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a \\ d/a(a+b) \\ d/a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a \\ d/b^2 \end{cases} \Rightarrow d/a \wedge b^2 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$$

و بنفس الطريقة نبين أن : $(a^2 + ab + b^2) \wedge b = 1$

الآن : $\begin{cases} (a^2 + ab + b^2) \wedge a = 1 \\ (a^2 + ab + b^2) \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow (a^2 + ab + b^2) \wedge ab = 1$

خلاصة: $(a^2 + ab + b^2) \wedge ab = 1 \iff a \wedge b = 1$

للتذكير: $x \wedge y = 1 \iff x^n \wedge y^m = 1$ و $\begin{cases} x \wedge y = 1 \\ x \wedge z = 1 \end{cases} \iff x \wedge yz = 1$

هناك طرق أخرى لحل هذا التمرين (على الأقل أعرف طريقتين)، لكننا فضلنا إدراج الطريقة التي يمكن تعميمها على أسئلة مشابهة.

3

- بداية نعلم أن : $(a \wedge c)/a$ و $(b \wedge c)/b$ منه : $(a \wedge c)(b \wedge c)/ab$ ، إذن : $c/ab \Rightarrow c/(a \wedge c)(b \wedge c)$

- من جهة أخرى ، نضع: $d = a \wedge c$ منه : $\exists(\sim, ª) \in IN^2 \ / \begin{cases} a = d\sim \\ c = d\,ª \\ \sim \wedge ª = 1 \end{cases}$

بين أن : $c/ab \Rightarrow d\,ª/d\sim b \Rightarrow \begin{cases} ª/\sim b \\ \sim \wedge ª = 1 \end{cases} \Rightarrow ª/b \Rightarrow ª\,d/bd \Rightarrow c/b(a \wedge c)$

مرة أخرى نضع : $¢ = b \wedge c$ منه : $\exists(p,q) \in IN^2 \ / \begin{cases} b = ¢\,p \\ c = ¢\,q \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$ منه :

$$c/b(a \wedge c) \Rightarrow ¢\,q/¢\,p\,(a \wedge c) \Rightarrow \begin{cases} q/p\,(a \wedge c) \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \Rightarrow q/(a \wedge c) \Rightarrow ¢\,q/¢\,(a \wedge c) \Rightarrow c/(b \wedge c)(a \wedge c)$$

4

نفرض أن : $a\wedge b=1$ ، إذن : $a^2\wedge b^2=1$ ، لدينا إذن:

$$\left(a^2-b^2\right)\wedge\left(a^3-b^3\right)=(a-b)(a+b)\wedge(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=(a-b)\left((a+b)\wedge\left(a^2+ab+b^2\right)\right)$$

نضع : $(a+b)\wedge\left(a^2+ab+b^2\right)=d$ ، إذن :

$$\begin{cases} d/a+b \\ d/a^2+ab+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^2+ab \\ d/ab+b^2 \\ d/a^2+ab+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^2 \\ d/b^2 \end{cases} \Rightarrow d/a^2\wedge b^2 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

بالتالي: $\left(a^2-b^2\right)\wedge\left(a^3-b^3\right)=a-b$

تمرين 2 : n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

1

لدينا : $A=ab\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)=\left(a^3b-ab^3\right)\left(a^2+b^2\right)$

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $\begin{cases} a^3\equiv a[3] \\ b^3\equiv b[3] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} ba^3\equiv ab[3] \\ ab^3\equiv ab[3] \end{cases}$ منه : $ba^3-ab^3\equiv 0[3]$ منه : $A\equiv 0[3]$

لدينا من جهة أخرى : $A=ab\left(a^4-b^4\right)=a^5b-ab^5$

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $\begin{cases} a^5\equiv a[5] \\ b^5\equiv b[5] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} ba^5\equiv ab[5] \\ ab^5\equiv ab[5] \end{cases}$ منه : $ba^5-ab^5\equiv 0[5]$ منه : $A\equiv 0[5]$

إذن : $3/A$ و $5/A$ ، وبما أن : $3\wedge 5=1$ فإن : $15/A$ ، بالتالي : $15/\ ab\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)$

2

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $n^7\equiv n[7]$

و $n^3\equiv n[3]$ منه: $n^6\equiv n^2[3]$ منه : $\begin{cases} n^7\equiv n^3[3] \\ n^3\equiv n[3] \end{cases}$ منه : $n^7\equiv n[3]$

و $n^2\equiv n[2]$ منه: $n^6\equiv n^3[2]$ منه : $n^7\equiv n^4\equiv n^2\equiv n[2]$

بما أن 2 و 3 و 7 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن: $42/n^7-n \quad \forall n\in IN$

بالنسبة للعدد 2 يمكن دراسة حالات الزوجية فقط دون الحاجة لمبرهنة فيرما.

3

لدينا :

$$4^n+6n+8=4^n-1+6n+9=3\left(4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4+1\right)+6n+9=3\left(4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4+1+2n+3\right)$$

الآن لدينا : $\begin{array}{l} 1\equiv 1[3] \\ 4\equiv 1[3] \\ 4^2\equiv 1[3] \\ \dots\equiv ..[3] \\ 4^{n-1}\equiv 1[3] \\ 4^n\equiv 1[3] \end{array}$ منه : $4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4+1\equiv n[3]$ منه :

$4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4+1+2n+3\equiv 3n+3\equiv 0[3]$ ، إذن : $4^{n-1}+4^{n-2}+\dots+4+1+2n+3\equiv 3k/k\in IN$

منه : $4^n+6n+8=9k$ ، بالتالي : بين أن : $9/4^n+6n+8$

4

لدينا : $6^n-1-5n=5\left(6^{n-1}+6^{n-2}+\dots+6+1-n\right)$

و بنفس طريقة السؤال السابق نبين أن : $\left(6^{n-1}+6^{n-2}+\dots+6+1\right)-n\equiv n-n\equiv 0[5]$

منه : $\left(6^{n-1}+6^{n-2}+\dots+6+1\right)-n=5k\quad /k\in IN$ بالتالي : بين أن : $6^n\equiv 1+5n[25]$

تمرين 3 : a و b و c و d أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.

- إذا كان a زوجي فإن : a^{4b+d} و a^{4c+d} زوجيان ، و إذا كان a فردي فإن : a^{4b+d} و a^{4c+d} فرديان

في كلا الحالتين $a^{4b+d}-a^{4c+d}$ زوجي، منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[2]$

- إذا كان $a\equiv 0[3]$ فإن : $a^{4b+d}\equiv 0[3]$ و $a^{4c+d}\equiv 0[3]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[3]$

في الحالة الآخرى نستنتج أن : $3\wedge a=1$ إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $a^{2}\equiv 1[3]$ منه : $a^{4b}\equiv 1[3]$ و $a^{4c}\equiv 1[3]$

منه : $a^{4b}\equiv a^{4c}[3]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[3]$ ، في كل الحلات نجد أن: $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[3]$

- إذا كان $a\equiv 0[5]$ فإن : $a^{4b+d}\equiv 0[5]$ و $a^{4c+d}\equiv 0[5]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[5]$

في الحالة الآخرى نستنتج أن : $5\wedge a=1$ إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $a^{4}\equiv 1[5]$ منه : $a^{4b}\equiv 1[5]$ و $a^{4c}\equiv 1[5]$

منه : $a^{4b}\equiv a^{4c}[5]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[5]$ ، في كل الحلات نجد أن: $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[5]$

بما أن 2 و 3 و 5 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن: $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[30]$

تمرين4 : p عدد أولي أكبر من 2 و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.(السؤالان مستقلان)

1

بدراسة زوجية العدد n نستنتج بسهولة أن : $(n+1)^{p}\equiv n^{p}+1\,[2]$

من جهة أخرى و حسب مبرهنة فيرما $\begin{cases}(n+1)^{p}\equiv n+1\,[p]\\ n^{p}\equiv n\,[p]\end{cases}$ منه : $(n+1)^{p}-n^{p}\equiv 1\,[p]$

أي : $(n+1)^{p}\equiv n^{p}+1\,[p]$

و بما أن p عدد أولي أكبر من 2 فإن : $p\wedge 2=1$ بالتالي : $(n+1)^{p}\equiv n^{p}+1\,[2p]$

2

لدينا $p>2$ منه : $p^{2}-p>0$ ، منه : $n^{p^{2}}-n^{p}=n^{p}\left(n^{p^{2}-p}-1\right)$

- إذا كان : $n\equiv 0[p]$ فإن : $n^{2}\equiv 0[p^{2}]$ منه : $n^{p^{2}}-n^{p}=n^{2}\,n^{p-2}\left(n^{p^{2}-p}-1\right)\equiv 0\left[p^{2}\right]$
- في الحالة الأخرى يكون لدينا : $n\wedge p=1$ ، إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $n^{p}\equiv 1[p]$

منه : $n^{p^{2}-p}-1=\left(n^{p}\right)^{p-1}-1=\left(n^{p}-1\right)\left[\left(n^{p}\right)^{p-2}+\left(n^{p}\right)^{p-3}+...+n^{p}+1\right]$

من $n^{p}\equiv 1[p]$ نستنتج أن : $\left(n^{p}\right)^{p-2}+\left(n^{p}\right)^{p-3}+...+n^{p}+1\equiv p\equiv 0[\,p\,]$

إذن : $n^{p}-1=p\sim /\sim\in IN$ و $\left(n^{p}\right)^{p-2}+\left(n^{p}\right)^{p-3}+...+n^{p}+1\equiv\quad p/\quad\in IN$

منه: $n^{p^{2}}-n^{p}=n^{p}\sim\quad p^{2}$ ، منه : بين أن : $n^{p^{2}}\equiv n^{p}\left[p^{2}\right]$

في جميع الحالات نستنتج أن : $n^{p^{2}}\equiv n^{p}\left[p^{2}\right]$

تمرين5 : n عدد صحيح طبيعي أكبر من 1 .

1

لدينا : $A_{n}=n^{4}+n^{2}+1=n^{4}+2n^{2}+1-n^{2}=\left(n^{2}+1\right)^{2}-n^{2}=\left(n^{2}+n+1\right)\left(n^{2}-n+1\right)$

و بما أن : $n^{2}+n+1>1$ و $n^{2}+n+1=n(n-1)+1>1$ ، إذن A_{n} غير أولي.

2

بدراسة زوجية العدد n نستنتج أن $n^{4}+n^{2}$ زوجي ، إذن A_{n} عدد فردي

ما يعني أن التفكيك الأولي للعدد A_{n} لا يحتوي على العدد 2

3

بين أن : $n\wedge 3=1\;\Rightarrow\;3/A_{n}$

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $n\wedge 3=1\;\Rightarrow\;n^{2}\equiv 1[3]\;\Rightarrow\;n^{4}\equiv 1[3]\Rightarrow n^{4}+n^{2}+1\equiv 3\equiv 0[\,3\,]\;\Rightarrow\;3/A_{n}$

تمرين6 : a و b و x أعداد من IN^{*} حيث $x>1$ ، نضع : $a\wedge b=d$

1

لدينا : $a\wedge b=d$ $\quad\exists(\sim,\quad)\in IN^{2}\;/\;\begin{cases}a=d\sim\\ b=d\\ \sim\wedge\quad=1\end{cases}$

ولدينا : $x^d \equiv 1[x^d-1]$ ، منه : $\begin{cases} x^{\sim d}\equiv 1[x^d-1] \\ x^{\ d}\equiv 1[x^d-1]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x^{\sim d}-1\equiv 0[x^d-1]\\ x^{\ d}-1\equiv 0[x^d-1]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x^d-1/x^{\sim d}-1\\ x^d-1/x^{\ d}-1\end{cases}$

إذن : $(x^d-1)/(x^a-1)\wedge(x^b-1)$

2

$(E)\quad ax+by=d$

أ) لدينا : $\sim \wedge \ =1$ إذن حسب مبرهنة Bezout فإن: $\exists(x_0,y_0)\in Z^2 \ /\ \sim x_0 + \ y_0 = 1$

منه : $\sim d\,x_0 + \ d\,y_0 = d$ أي : $a x_0 + b y_0 = d$

ما يعني أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x_0,y_0) في Z^2

ب) $(E) \Leftrightarrow \sim x + \ y = 1 \Leftrightarrow \sim x + \ y = \sim x_0 + \ y_0 \Leftrightarrow \sim(x-x_0) = \ (y_0-y)$

$(E)\Leftrightarrow \begin{cases}x-x_0 = \ k\\ y_0-y=\sim k\end{cases}/k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases}x=\ k+x_0\\ y=y_0-\sim k\end{cases}/k\in Z$

بالتالي : $S=\{(\ k+x_0\ ,y_0-\sim k)/\ k\in Z\}$

ج) لنبحث عن إمكانية إيجاد زوج (x,y) من مجموعة الحلول السابقة حيث يكون : $\begin{cases}x\ge0\\ y\le0\end{cases}$

لدينا : $\begin{cases}x\ge0\\ y\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ k+x_0\ge0\\ y_0-\sim k\le0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\ge \frac{-x_0}{\ }\\ k\ge\frac{y_0}{\sim}\end{cases}$

إذن يكفي أن نأخذ : $k=k_0=Max\left(E\left(\frac{-x_0}{\ }\right);E\left(\frac{y_0}{\sim}\right)\right)+1$

مما يعني صحة العبارة : $\exists(u,v)\in IN^2\ /\ \ au-bv=d$ حيث : $u=\ k_0+x_0$ و $v=-(y_0-\sim k_0)=\sim k_0-y_0$

د) لدينا: $(x^{au}-1)-(x^{bv}-1)x^d = x^{au}-1-x^{bv+d}+x^d = x^{au}-1-x^{au}+x^d = x^d-1$

3

لدينا من جهة حسب السؤال الأول : $(x^d-1)/(x^a-1)\wedge(x^b-1)\quad(1)$

و من جهة أخرى : $\begin{cases}x^a\equiv1[x^a-1]\\ x^b\equiv1[x^b-1]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x^{au}\equiv1[x^a-1]\\ x^{bv}\equiv1[x^b-1]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x^a-1/x^{au}-1\\ x^b-1/x^{bv}-1\end{cases}$

وحيث أن : $(x^d-1)/(x^a-1)\wedge(x^b-1)$ فإن : $\begin{cases}(x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^a-1\\ (x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^b-1\end{cases}$ منه : $\begin{cases}(x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^{au}-1\\ (x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^{bv}-1\end{cases}$

منه : $(x^a-1)\wedge(x^b-1)/(x^{au}-1)-(x^{bv}-1)x^d$ أي : $(x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^d-1\quad(2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(x^a-1)\wedge(x^b-1)=(x^{a\wedge b}-1)$