تمارين حول الحسابيات

الاولى سلك بكالوريا علوم رياضية

تمارين و حلول

تمرين1 ليكن n عددا صحيحا طبيعيا

-1 بين أن8 يقسم n^2-1 لكل عدد صحيح الطبيعي فردي n

-2 بين لكل n من IN العدد n^3-n يقبل القسمة على 3

تمرين2

ليكن a و b عددين مختلفين من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

بين أن إذا كان a^n-b^n عددا أوليا فان n عدد أولي

تمرين3

ليكن $n\in\mathbb{N}$. نعتبر المعادلة $(x-2n)(y-2n)=2n^2$ $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

ليكن $\delta=(x-2n)\wedge(y-2n)$

-1 بين أن $\delta^2/2n^2$ و $\delta/(x\wedge y)$

-2 بين أن $x^2+y^2=(x+y-2n)^2$ و استنتج أن $(x\wedge y)/\delta$

-3 بين أن $(x\wedge y)/n$

تمرين4

ليكن $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ حيث $(a+b)\wedge ab=p^2$ و p عدد صحيح طبيعي أولي

أ- بين أن p^2/a^2 و استنتج أن p/a و p/b

ب- بين أن $a\wedge b=p$ أو $a\wedge b=p^2$

تمرين5

لكل عدد صحيح طبيعي n نعتبر الأعداد $a_n=4\times10^n-1$ و $b_n=2\times10^n-1$

و $c_n=2\times10^n+1$

أ/ أحسب b_1 ، c_1 ، a_2 ، b_2 ، c_2 ، a_3، b_3، c_3.

ب/ بين أن a_n و c_n قابلان للقسمة على 3

ج/ بين أن b_3 عدد أولي

د/ بين أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n : $b_n\times c_n=a_{2n}$ استنتج التفكيك إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6

ه/ بين أن $PGCD(b_n;c_n)=PGCD(b_n;2)$

حلول

حل تمرين1

-1 ليكن n عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $n=2k+1$

لدينا $n^2-1=(n-1)(n+1)$ ومنه $n^2-1=4k(k+1)$

وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)

فانه يوجدk' من $\mathbb{N}$ حيث$k(k+1)=2k'$ و بالتالي$n^2-1=8k'$

إذن 8 يقسم n^2-1

-2 لدينا $n^3-n=n(n-1)(n+1)$

ليكن n من IN و منه يوجد $k\in\mathbb{N}$ حيث $n=3k$ أو $n=3k+1$ أو $3k+2$

و بالتالي $n^3-n=3k(3k-1)(3k+1)$ أو $n^3-n=(3k+1)(3k)(3k+2)$

أو $n^3-n=(3k+2)(3k+1)(3k+3)=3(3k+2)(3k+1)(k+1)$

و في جميع هذه الحالات $n^3-n=3k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$

اذن n^3-n يقبل القسمة على 3

حل تمرين2

ليكن a و b عددين مختلفين من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

نبين أن إذا كان a^n-b^n عددا أوليا فان n عدد أولي

لنبين أن n عدد غير أولي تستلزم a^n-b^n عدد غير أولي (الاستلزام المضاد للعكس)

n عدد غير أولي ومنه $n=pq$ / $\exists(p;q)\in(\mathbb{N}^*-\{1\})^2$

و منه $$a^{pq}-b^{pq}=(a^p)^q-(b^p)^q=(a^p-b^p)\left(\sum_{k=0}^{q-1}(a^p)^k(b^b)^{q-1-k}\right)$$

بما أن a و b عددين مختلفين من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ و $(p;q)\in(\mathbb{N}^*-\{1\})^2$ فان $|a^p-b^p|\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

و $\sum_{k=0}^{q-1}(a^p)^k(b^b)^{q-1-k}\succ 1$

اذن a^n-b^n عدد غير أولي

و منه إذا كان a^n-b^n عددا أوليا فان n عدد أولي

حل تمرين3

ليكن $n\in\mathbb{N}$. نعتبر المعادلة $(x-2n)(y-2n)=2n^2$ $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

ليكن $\delta=(x-2n)\wedge(y-2n)$

-1 نبين أن $\delta^2/2n^2$

* لدينا $\delta=(x-2n)\wedge(y-2n)$ ومنه $\delta/(x-2n)$ و $\delta/(y-2n)$

وبالتالي $\delta^2/(x-2n)(y-2n)$ إذن $\delta^2/2n^2$

نبين أن $\delta/(x\wedge y)$

لدينا $\delta^2/2n^2$ و منه $\delta/2n$

و حيث $\delta/(x-2n)$ و $\delta/(y-2n)$ فان δ/x و δ/y إذن $\delta/(x\wedge y)$

-2 نبين أن $x^2+y^2=(x+y-2n)^2$

$$\begin{aligned}(x+y-2n)^2&=x^2+y^2+2xy-4nx-4ny+4n^2\\&=x^2+y^2+2(xy-2nx-2ny+2n^2)\\&=x^2+y^2+2((x-2n)(y-2n)-2n^2)\\&=x^2+y^2\quad car\quad (x-2n)(y-2n)-2n^2=0\end{aligned}$$

نستنتج أن $(x\wedge y)/\delta$

لدينا $(x\wedge y)^2/x^2$ و $(x\wedge y)^2/y^2$ ومنه $(x\wedge y)^2/(x^2+y^2)$

و بالتالي $(x\wedge y)^2/(x+y-2n)^2$ ومنه $(x\wedge y)/(x+y-2n)$

و حيث $(x\wedge y)/x$ و $(x\wedge y)/y$ فان $(x\wedge y)/(x-2n)$ و $(x\wedge y)/(y-2n)$

إذن $(x\wedge y)/[(x-2n)\wedge(y-2n)]$ أي $(x\wedge y)/\delta$

3- نبين أن $(x \wedge y)/n$

لدينا $\delta/2n$ ومنه $2n = k\delta$ $\exists k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي $4n^2 = k^2\delta^2$

لينا $\delta^2/2n^2$ ومنه $2n^2 = k'\delta^2$ $\exists k' \in \mathbb{Z}$ أي $4n^2 = 2k'\delta^2$

ومنه $k^2 = 2k'$ ومنه k زوجي أي $k = 2m$ $\exists m \in \mathbb{Z}$

و حيث $2n = k\delta$ فان $2n = 2m\delta$ أي $n = m\delta$ إذن δ / n

و بما أن $(x \wedge y)/\delta$ فان $(x \wedge y)/n$

حل تمرين4

ليكن $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ حيث $(a+b) \wedge ab = p^2$ و p عدد صحيح طبيعي أولي

أ- نبين أن p^2/a^2 و نستنتج أن p/a و p/b

$(a+b) \wedge ab = p^2$ ومنه p^2/ab و $p^2/a+b$

وبالتالي $p^2/ab+b^2$ و p^2/a^2+ab اذن p^2/a^2 و p^2/b^2

ومنه p/a و p/b

ب- بين أن $a \wedge b = p$ أو $a \wedge b = p^2$

ليكن $a \wedge b = d$ ومنه d/a و d/b

و بالتالي d/ab و $d/a+b$ اذن $d/(a+b) \wedge ab$ أي d / p^2

ومنه $d \in \{1; p; p^2\}$

لنفرض أن $d = 1$

$d = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1 \Rightarrow (a+b) \wedge ab = 1 \Rightarrow p = 1$ وهذا غير صحيح لأن p أولي

إذن $d = p$ أو $d = p^2$

حل تمرين5

$a_n = 4 \times 10^n - 1$ و $b_n = 2 \times 10^n - 1$ و $c_n = 2 \times 10^n + 1$

أ/ نحسب b_1 ، c_1 ، a_2 ، b_2 ، c_2 ، a_3، b_3، c_3.

$a_1 = 4 \times 10^1 - 1 = 39$ $\quad$ $b_1 = 2 \times 10^1 - 1 = 19$ $\quad$ $c_1 = 2 \times 10^1 + 1 = 21$

$a_2 = 4 \times 10^2 - 1 = 399$ $\quad$ $b_2 = 2 \times 10^2 - 1 = 199$ $\quad$ $c_2 = 2 \times 10^2 + 1 = 201$

$a_3 = 4 \times 10^3 - 1 = 3999$ $\quad$ $b_3 = 2 \times 10^3 - 1 = 1999$ $\quad$ $c_3 = 2 \times 10^3 + 1 = 2001$

ب/ نبين أن a_n و c_n قابلان للقسمة على 3

لدينا $10 \equiv 1 \quad [3]$ ومنه $10^n \equiv 1 \quad [3]$ و حيث ان $4 \equiv 1 \quad [3]$ فان $4 \times 10^n \equiv 1$

ومنه $4 \times 10^n - 1 \equiv 0 \quad [3]$ أي $a_n \equiv 0 \quad [3]$

لدينا $10^n \equiv 1 \quad [3]$ ومنه $2 \times 10^n \equiv 2 \quad [3]$ أي $2 \times 10^n \equiv -1$

ومنه $2 \times 10^n + 1 \equiv 0 \quad [3]$ اذن $c_n \equiv 0$

إذن a_n و c_n يقبلان القسمة على 3

ج/ نبين أن b_3 عدد أولي

لدينا $b_3 = 1999$ و 1999 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي أصغر أو تساوي 47

و $47^2 = 2209 \succ 1999$

إذن b_3 عدد أولي

د/ نبين أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n : $b_n \times c_n = a_{2n}$

ليكن $n \in \mathbb{N}$

$b_n \times c_n = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1) = (2 \times 10^n)^2 - 1^2 = 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}$

نستنتج التفكيك إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6

$a_6 = b_3 \times c_3 = 1999 \times 2001$ و $2001 = 3 \times 23 \times 29$

$a_6 = 3 \times 23 \times 29 \times 1999$

ه/ نبين أن $PGCD(b_n ; c_n) = PGCD(b_n ; 2)$

$c_n = 2 \times 10^n + 1 = 2 \times 10^n - 1 + 2 = b_n + 2$

إذا كان d قاسم مشترك للعددين c_n و b_n فان d قاسم للعدد2 لان $c_n - b_n = 2$

إذا كان d قاسم مشترك للعددين b_n و 2 فانه قاسم للعدد c_n لان $c_n = b_n + 2$

ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعدين c_n و b_n هي مجموعة قواسم العددين b_n و 2

إذن $PGCD(b_n ; c_n) = PGCD(b_n ; 2)$