مبرهنة التزايديات المنتهية

تمرين1

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

بين أن : $\exists c \in]1;2[\ / f'(c) = 0$

الحل

لدينا : f دالة عددية متصلة على $[1;2]$ قابلة للاشتقاق على $]1;2[$ و $f(1) = f(2)$

إذن حسب مبرهنة رول

$$\exists c \in]1;2[\ / f'(c) = 0$$

تمرين2

f و g دالتان عدديتان متصلتان على $[a;b]$ قابلتان للاشتقاق على $]a;b[$

بحيث : $\forall x \in]a;b[\ g'(x) \neq 0$

بين أن : $\exists c \in]a;b[\ / \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

الحل

نطبق مبرهنة رول على :

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$$

تمرين3

f دالة عددية قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

بحيث : $f(0) = 0$ و $\forall x \in]0;1[\quad f'(x) > 0$

$(n;m) \in \mathbb{Q}_*^2$

بين أن : $\exists c \in]0;1[\ / n\dfrac{f'(c)}{f(c)} = m\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

الحل

نطبق مبرهنة رول على :

$$g(x)=f^{n}(x)\left(f(1-x)\right)^{m}$$

تمرين4

f دالة عددية متصلة على $[a;b]$ قابلة للاشتقاق على $]a;b[$

بحيث : $f(a)=f(b)$ و $f'(a)=0$

بين أن : $\exists c\in]a;b[\ / f'(c)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

الحل

نطبق مبرهنة رول على :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & x\in]a;b] \\ g(a)=f'(a) \end{cases}$$

تمرين5

$$f(x)=\left(e^{x}-1\right)(\ln x-1)(2x-6)(x+1)$$

بدون حساب $f'(x)$ بين أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول مختلفة

الحل

حلول المعادلة $f(x)=0$ هي : $S=\{-1;0;e;3\}$

نطبق مبرهنة رول على $f(x)$: في المجالات :

$[-1;0]\ ;\ [0;e]\ ;\ [e;3]$

تمرين6

a و b عددان من $\mathbb{R}^{+*}$ بحيث : $a<b$

بين أن : $\dfrac{b-a}{b}\le \ln(b)-\ln(a)\le \dfrac{b-a}{a}$

الحل

نطبق مبرهنة التزايديات المنتهية على :

$\ln(x)\qquad x\in[a;b]$

$$\exists c\in]a;b[\ / \ln(b)-\ln(a)=\frac{1}{c}(b-a)$$

لدينا : $a<c<b \Leftrightarrow \dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{a}$

و منه : $\dfrac{b-a}{b}\le \ln(b)-\ln(a)\le \dfrac{b-a}{a}$

تمرين7

باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية بين أن :

$$\forall x\in]0;+\infty[\quad \frac{x}{1+x^{2}}<\arctan(x)<x$$

الحل

نطبق مبرهنة التزايديات المنتهية على :

$f(t)=\arctan(t)\quad t\in[0;x]$

إذن : $\exists c\in]0;x[\ / \arctan(x)-\arctan(0)=\dfrac{1}{1+c^{2}}\times x$

و منه : $\exists c\in]0;x[\ / \arctan(x)=\dfrac{1}{1+c^{2}}\times x$

و لدينا : $0<c<x$ إذن : $\dfrac{1}{1+x^{2}}<\dfrac{1}{1+c^{2}}<1$

إذن : $\forall x\in]0;+\infty[\quad \dfrac{x}{1+x^{2}}<\arctan(x)<x$

تمرين8

$$f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)\quad x\in\mathbb{R}$$

نعتبر المتتالية (u_n) ، حدها الأول u_0 بحيث :

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

1- بين أن : $u_n>0\quad \forall n\in\mathbb{N}^{*}$

2- بين أن : $\forall x>0\ \left|f'(x)\right|\le\dfrac{1}{2}$

3- بين أن : $\left|u_{n+1}-\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\le\dfrac{1}{2}\left|u_n-\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\quad \forall n\in\mathbb{N}^{*}$

4- استنتج أن : (u_n) متقاربة ثم احسب : $\lim u_n$

الحل

1- $u_n>0\quad \forall n\in\mathbb{N}^{*}$: لأن $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)>0$

2- لدينا : $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{-1}{1+e^{x}}$

إذن : $\left|f'(x)\right|=\dfrac{1}{1+e^{x}}$

بما أن : $x>0$ فإن : $e^{x}>1$

ومنه : $\dfrac{1}{1+e^{x}}<\dfrac{1}{2}$

إذن : $\forall x>0\ \left|f'(x)\right|\le\dfrac{1}{2}$

3- نعتبر : $\alpha=\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ لدينا : $f(\alpha)=\alpha$

نطبق مبرهنة التزايديات المنتهية على : $f(x)$ في المجال المحصور بين : α و u_n

إذن : يوجد c تنتمي إلى المجال المفتوح المحصور بين : α و u_n بحيث : $f(u_n)-f(\alpha)=f'(c)(u_n-\alpha)$

و لدينا : $\alpha>0$ و $u_n>0\quad \forall n\in\mathbb{N}^{*}$

إذن : $c>0$ و منه : $\left|f'(c)\right|\le\dfrac{1}{2}$

و منه : $\left|u_{n+1}-\alpha\right|\le\dfrac{1}{2}\left|u_n-\alpha\right|\quad \forall n\in\mathbb{N}^{*}$

-4 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1-\alpha|$

و منه : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1-\alpha|$

إذن : $\lim u_n = \alpha$