

تمارين: مبرهنة التزايدات المنتهية

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضة

تمارين محلولة

التمرين 1

نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_0 = \frac{1}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = g(u_n)$

حيث $\forall x \in [0; +\infty[\quad g(x) = \arctan(-x + \sqrt{x^2 + 1})$

1- بين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

2- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| < \frac{4}{5}|u_n - \alpha|$

3- استنتج أن (u_n) متقاربة محددنا نهايتها

الحل

1- نبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

نعتبر $h(x) = g(x) - x$ على $[0;1]$ لدينا h متصلة على $[0;1]$

لدينا $h'(x) = \frac{-1}{2(x^2 + 1)} - 1$ ومنه h تناقصية قطعاً على $[0;1]$

لدينا $h(0) \times h(1) = \frac{\pi}{4}(\arctan(\sqrt{2} - 1) - 1)$

$0 < \arctan(\sqrt{2} - 1) < 1$ ومنه $(\sqrt{2} - 1 < 1, \frac{\pi}{4} < 1 \text{ لأن } 0 < \sqrt{2} - 1 < \tan \frac{\pi}{4} < \tan 1)$

إذن $h(0) \times h(1) < 0$

إذن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

أي أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

2- نبين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| < \frac{4}{5}|u_n - \alpha|$

لدينا $\forall x \in [0; +\infty[\quad g(x) \in]0;1[$

وحيث $u_0 = \frac{1}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = g(u_n)$ فان $0 < u_n < 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) (نبين ذلك بالترجع)

الدالة g متصلة في مجال مغلق طرفاه α و u_n وقابلة للاشتقاق في مجال مفتوح طرفاه α و u_n

ومنه يوجد c محصور قطعاً بين α و u_n حيث $g(u_n) - g(\alpha) = g'(c)(u_n - \alpha)$

أي أن $u_{n+1} - \alpha = \frac{-1}{2(1+c^2)}(u_n - \alpha)$ ومنه $|u_{n+1} - \alpha| = \frac{1}{2(1+c^2)}|u_n - \alpha|$

وحيث أن $0 < c < 1$ فان $\frac{1}{4} < \frac{1}{2(1+c^2)} < \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ ومنه $|u_{n+1} - \alpha| < \frac{4}{5}|u_n - \alpha|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3- نستنتج أن (u_n) متقاربة محددنا نهايتها

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| < \frac{4}{5}|u_n - \alpha|$

$$|u_1 - \alpha| < \frac{4}{5}|u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| < \frac{4}{5}|u_1 - \alpha|$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$|u_n - \alpha| < \frac{4}{5}|u_{n-1} - \alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على $|u_n - \alpha| < \left(\frac{4}{5}\right)^n |u_0 - \alpha|$

وحيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$ فان (u_n) متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

التمرين 2

لتكن f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x) = \frac{1}{4} \tan \frac{1}{x+1}$

1- بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $|f'(x)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} \forall x \in [0;1]$

2- بين أن $f([0;1]) \subset [0;1]$

3- أ- بين أنه $\exists! \alpha \in]0;1[$: $f(\alpha) = \alpha$

ب- استنتج أن $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |x - \alpha| \forall x \in]0;1[- \{\alpha\}$

4- نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 \in]0;1[- \{\alpha\} \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{u_n + 1} \right) \end{cases}$

أ- بين أن $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4 \cos^2 1} \right)^n |u_0 - \alpha| \forall n \in \mathbb{N}$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

الحل

$f(x) = \frac{1}{4} \tan \frac{1}{x+1}$ دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي

4- نبين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $|f'(x)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} \forall x \in [0;1]$

$\forall x \in [0;1] \quad \frac{1}{x+1} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$ و $[0;1]$ قابلة للاشتقاق على $x \rightarrow \frac{1}{x+1}$

إذن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

$$\forall x \in [0;1] \quad f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \left[1 + \tan^2 \frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \left[\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{1}{x+1} \right)} \right] \text{ و}$$

$$\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x+1)^2} \right) \left[\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{1}{x+1} \right)} \right]$$

الدالتان $x \rightarrow \cos x$ و $x \rightarrow \frac{1}{(x+1)^2}$ تناقصيتان على $[0;1]$ و $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$

$$\forall x \in [0;1] \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq 1 \quad ; \quad 1 \leq \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x+1}} \leq \frac{1}{\cos^2 1} \text{ ومنه}$$

$$\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} \text{ إذن}$$

5- نبين أن $f([0;1]) \subset [0;1]$

$$\forall x \in [0;1] \quad f'(x) \leq 0 \text{ و } \forall x \in [0;1] \quad f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \left[\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{1}{x+1} \right)} \right]$$

إذن f تناقصية على $[0;1]$ ومنه $f([0;1]) = \left[\frac{1}{4} \tan \frac{1}{2}; \frac{1}{4} \tan 1 \right] \subset [0;1]$

6- أ- نبين أنه : $\exists! \alpha \in]0;1[\quad f(\alpha) = \alpha$

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;1]$ بـ $g(x) = f(x) - x$
 g متصلة على $[0;1]$

$$g(1) = -1 + \frac{1}{4} \tan \frac{1}{2} \leq 0 \quad \text{و} \quad g(0) = \frac{1}{4} \tan(1) \geq 0$$

إذن $\exists! \alpha \in]0;1[\quad f(\alpha) = \alpha$

$$\forall x \in]0;1[- \{ \alpha \} \quad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |x - \alpha|$$

ليكن $x \in]0;1[- \{ \alpha \}$

لدينا f متصلة على مجال مغلق طرفاه α و x

f قابلة للاشتقاق على مجال I مفتوح طرفاه α و x

ومنه يوجد عدد c ينتمي إلى I حيث $f(x) - f(\alpha) = f'(c)(x - \alpha)$

$$\forall x \in]0;1[- \{ \alpha \} \quad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |x - \alpha| \text{ فان } \forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} \text{ و حيث أن}$$

$$\begin{cases} u_0 \in]0;1[- \{ \alpha \} \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{u_n + 1} \right) \end{cases} \quad -4$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4 \cos^2 1} \right)^n |u_0 - \alpha| \quad \text{أ- نبين أن}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{u_n + 1} \right) = f(u_n) \quad \text{لدينا}$$

$$\dots \dots \dots \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in]0;1[\quad \text{نبين بالترجع أن}$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_n - \alpha| \quad \text{و بالتالي} \quad |f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_n - \alpha| \quad \text{ومنه}$$

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_0 - \alpha| \quad \text{من أجل } n = 0 \text{ لدينا}$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_1 - \alpha| \quad \text{من أجل } n = 1 \text{ لدينا}$$

.....
.....
.....

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_{n-1} - \alpha|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4 \cos^2 1} \right)^n |u_0 - \alpha| \quad \text{بضرب أطراف المتفاوتات والاختزال نحصل على}$$

ب- نستنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4 \cos^2 1} \right)^n |u_0 - \alpha| \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4 \cos 1} \right]^n = 0 \quad \text{متقاربة و} \quad \left(\left[\frac{1}{4 \cos 1} \right]^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{المتتالية}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha \quad \text{ومنه } (u_n) \text{ متقاربة و}$$

التمرين 3

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{المتتالية العددية المعرفة بما يلي}$$

$$\forall x \in [0;2] \quad g(x) = \arctan \sqrt{x+2} \quad \text{حيث}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \arctan x \leq x \quad \text{أ- بين أن}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 2 \quad \text{ب- بين أن}$$

$$\text{ج- بين أن } (u_n) \text{ متقاربة}$$

$$\text{أ- 2- بين أن المعادلة } g(x) = x \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ من }]0;2[$$

$$\forall x \in]0;2[\quad g'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad \text{ب- أثبت أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{استنتج} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_n - \alpha| \quad \text{ج- بين أن}$$

الحل

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \arctan x \leq x \quad \text{أ- 2- نبين أن}$$

لدينا $x \rightarrow x$ و $x \rightarrow \arctan x$ متصلتان على \mathbb{R}^+ و قابلتان للاشتقاق على $]0; +\infty[$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x)' = x$$

لدينا $\frac{1}{1+x^2} < 1 \quad \forall x \in]0; +\infty[$ أي $(\arctan x)' < (x)'$ و $\arctan 0 = 0$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \arctan x \leq x$

(ب) نبين أن $0 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

من أجل $n = 0$ لدينا $0 \leq u_0 \leq 2$ لأن $u_0 = 2$

نفترض أن $0 \leq u_n \leq 2$ ونبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

لدينا $\forall x \in [0; 2] \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} > 0$ ومنه g تزايدية على $[0; 2]$

وحيث أن $0 \leq u_n \leq 2$ فإن $g(0) \leq g(u_n) \leq g(2)$ أي $g(0) \leq u_{n+1} \leq g(2)$

لدينا $g(2) = \arctan 2 \leq 2$; $g(0) = \arctan \sqrt{2} \geq 0$

ومنه $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ إذن $0 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ج) نبين أن (u_n) متقاربة

لندرس رتبة (u_n)

لدينا $u_1 = g(u_0) = g(2) = \arctan 2$ ومنه $u_1 \leq u_0$

نفترض أن $u_{n+1} \leq u_n$ نبين أن $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

لدينا $u_{n+1} \leq u_n$

وحيث أن g تزايدية على $[0; 2]$ فإن $g(u_{n+1}) \leq g(u_n)$ أي أن $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$

ومنه (u_n) تناقصية و بما أن (u_n) مصغورة بالعدد 0 فإن (u_n) متقاربة

(أ) نبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α من $]0; 2[$

نعتبر الدالة h حيث $h(x) = g(x) - x$

h متصلة على $[0; 2]$ قابلة للاشتقاق على $]0; 2[$

و $h(0) \times h(2) = (\arctan \sqrt{2})(-2 + \arctan 2) < 0$

ومنه المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا في $]0; 2[$

لدينا $h'(x) = g'(x) - 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x+1}(x+3)}{2\sqrt{x+2}(3+x)}$

وحيث $1 - 2\sqrt{x+1}(x+3) < 0 \quad \forall x \in]0; 2[$ فإن h تناقصية قطعاً على $]0; 2[$

إذن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $]0; 2[$

(ب) نثبت أن $\forall x \in]0; 2[\quad g'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$

ليكن $x \in]0; 2[$ لدينا $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)}$

بما أن $0 < x < 2$ فإن $3 < x+3 < 5$ و $2\sqrt{2} < 2\sqrt{x+2} < 4$

و بالتالي $6\sqrt{2} < 2(x+3)\sqrt{x+2} < 20$ ومنه $\frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} < \frac{1}{6\sqrt{2}}$

$$\forall x \in]0; 2[\quad g'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad \text{إذن}$$

(ج) نبين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$ و نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

g متصلة على $]0; 2[$ و قابلة للاشتقاق على $]0; 2[$ و $\alpha \in]0; 2[$ و $u_n \in]0; 2[$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ومنه يوجد c من $]0; 2[$ حيث $g(u_n) - g(\alpha) = g'(c)(u_n - \alpha)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

و بالتالي $|g(u_n) - g(\alpha)| = |g'(c)| |u_n - \alpha|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

و حيث $|g'(c)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$ فان $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$

نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_1 - \alpha|$$

· ·
· ·
· ·

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_{n-1} - \alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{6\sqrt{2}} \right)^n |u_0 - \alpha|$$

و حيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6\sqrt{2}} \right)^n = 0$ فان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$