

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$$

تمرين 1: نعتبر الدالة العددية :

1) حدد Df

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

2) احسب

$$\forall x \in Df \quad f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+2}{x+1}$$

3) بين أن :

4) أوجد معادلة المماس في النقطة $x_0 = 0$ 5) اعط جدول تغيرات f

6) حدد مطارات الدالة

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x} & ; \quad x > 1 \\ f(x) = \sqrt{2-x} & ; \quad x \leq 1 \end{cases}$$

تمرين 2: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 2) هل تقبل f نهاية في 1 ؟3) ادرس قابلية اشتقاق f في 1.

4) حدد معادلة نصفي المماس في النقطة ذات الأقصول 1

5) احسب $(f')'(x)$ على كل من $[1; +\infty]$ و $[-\infty; 1]$ 6) اعط جدول تغيرات f

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$$

تمرين 3: نعتبر الدالة :

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 2) احسب $f'(x)$ لـ x من IR 3) اعط جدول تغيرات f 4) هل لـ f قيم قصوية أو دنوية مطلقة ؟

$$\forall a > 0; \quad 2a + \frac{1}{a^3} \geq 3$$

تمرين 4: بدراسة تغيرات الدالة $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ على $[0; +\infty]$ ، بين أن :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} : \underline{\text{تمرين 1}}$$

$$Df = \{x \in IR / x+1 \neq 0\} =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

2

$$(\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} 2x^2 + 2x - 1 = -1 : \text{ لأن}) \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$\forall x \in Df \quad f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} \right)' = \frac{(4x+2)(x+1)^2 - (2x^2 + 2x - 1) \times 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)[(4x+2)(x+1) - 2(2x^2 + 2x - 1)]}{(x+1)^4} = \frac{4x^2 + 4x + 2x + 2 - 4x^2 - 4x + 2}{(x+1)^3}$$

3

$$f'(x) = \frac{2x+4}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+2}{x+1}$$

$$(\Delta): y = 4x - 1 \text{ و } f'(0) = 4 \text{ إذن المماس في } x_0 = 0 \text{ هي: } f(0) = -1$$

4

بما أن

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$x+2$	-	+	+	
$x+1$	-	-	+	
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	2	3	$-\infty$	2

5

حسب جدول التغيرات فالدالة f تقبل قيمة قصوية نسبية في النقطة $A(-2; 3)$

6

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x} ; x > 1 \\ f(x) = \sqrt{2-x} ; x \leq 1 \end{cases} : \underline{\text{تمرين 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

1

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2-x} = 1 \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} = 1 \text{ إذن } f \text{ تقبل نهاية في } 1$$

2

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 + 1}{2x} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 - 2x + 1}{2x} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{2x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2x} = 0$$

3

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sqrt{2-x}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2-x-1}{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1-x}{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-1}{\sqrt{2-x}+1} = \frac{-1}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقة يمين ويسار 1، ولدينا: $f'_g(1) = 0$ و $f'_d(1) = 0$

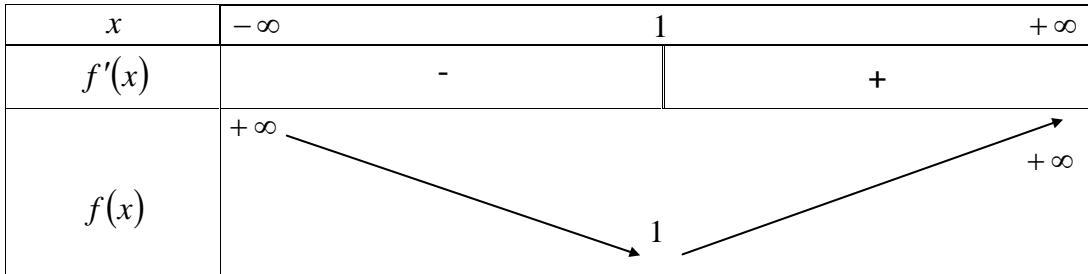
لكنها غير قابلة للاشتقاء في 1 لأن: $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

$$(\Delta_g): \begin{cases} y = \frac{-1}{2}(x-1)+1 = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2} \\ x \leq 1 \end{cases} \text{ و } (\Delta_d): \begin{cases} y = 1 \\ x \geq 1 \end{cases} : \text{معادلة نصفي الماس في النقطة ذات الأقصول 1}$$

4

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+1}{x} \right)' = \frac{1}{2} \frac{2x \times x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{x^2-1}{x^2} ; x > 1 \\ f'(x) = (\sqrt{2-x})' = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} ; x < 1 \end{cases}$$

بما أن $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0$ و لدينا: $\forall x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0$ إذن:



تمرين 3: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

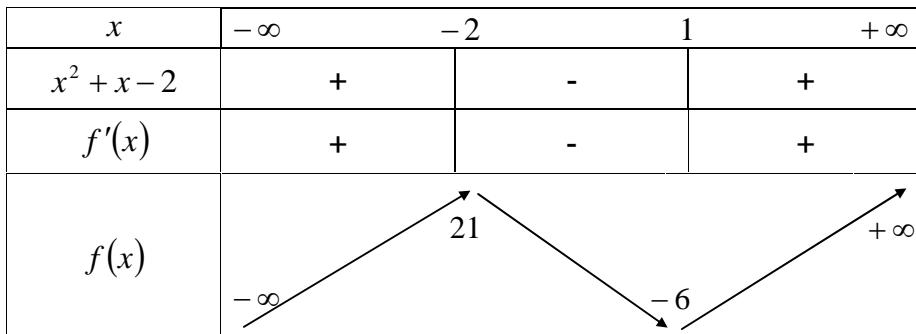
1

$$\forall x \in IR \quad f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$$

2

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة الحدودية: $x^2 + x - 2$

إذن هذه الحدودية تقبل جذريين مختلفين هما: $r_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$ و $r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$ $\Delta = 1+8=9>0$



حسب جدول التغيرات فإن f تقبل قيمة قصوية نسبية في النقطة $A(-2; 21)$ وقيمة دنوية نسبية في النقطة $B(1; -6)$ ، لكن هذه النقط لا تمثل قيمًا مطلقة لأن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

4

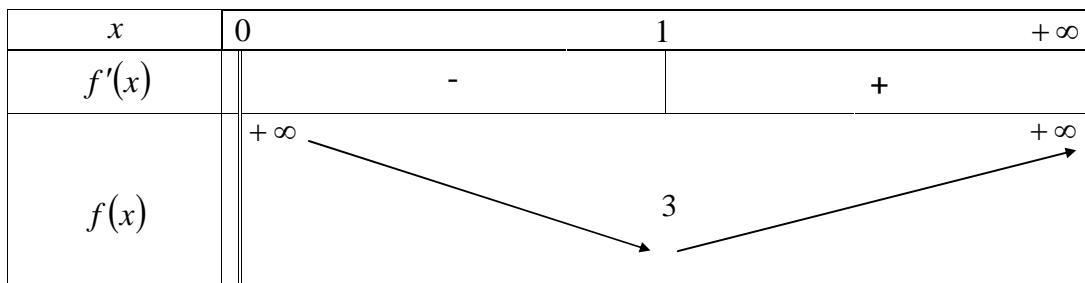
تمرين 4: لنبين أن: $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ على $[0; +\infty]$ بدراسة الدالة $\forall a > 0$; $2a + \frac{1}{a^3} \geq 3$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3}(x^3 - 1) = \frac{2}{x^3}(x-1)(x^2 + x + 1)$$

ولدينا: $\forall x > 0 \quad f'(x) < 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة الحدانية $x-1$ ، منه :



إذن الدالة f تقبل قيمة دنوية مطلقة في النقطة $A(1 ; 3)$ مما يعني أن : $\forall x > 0; \quad f(x) \geq 3$

$$\forall a > 0; \quad 2a + \frac{1}{a^3} \geq 3 \quad \text{أو أيضا :}$$