

سلسلة 1	الإشتقاق		السنة 1 بكالوريا علوم رياضية
<p>تمرين 1: باستعمال التعريف ادرس اشتقاق الدالة f في النقطة x_0 في كل حالة مما يلي ثم اكتب معادلة المماس في هذه النقطة:</p> $\begin{cases} f(x) = \sin(5x) \\ x_0 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{2x+7} \\ x_0 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} f(x) = \frac{2x}{x-3} \\ x_0 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} f(x) = -x^2 + 3x + 1 \\ x_0 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f(x) = \tan(2x) \\ x_0 = \frac{f}{8} \end{cases}, \quad \begin{cases} f(x) = \cos^2(x) \\ x_0 = \frac{f}{2} \end{cases}$			
<p>تمرين 2:</p> <p>1) حدد الدالة التآلفية المماسية للدالة $\sqrt{1+x}$ في النقطة 0 ثم أعط تقريبا للعددين $\sqrt{1,0002}$ و $\sqrt{0,9996}$</p> <p>2) بين أن $1-x \approx \frac{1}{1+x}$ عندما يكون x قريبا من الصفر ثم أعط تقريبا للعدد $\frac{1}{1,015}$</p> <p>3) أعط تقريبا للعدد $\sin 0,02$ ثم استنتج تقريبا للعدد $\cos 0,02$</p>			
<p>تمرين 3: ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة x_0 ثم حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (Cf) عند النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ في كل حالة مما يلي:</p> $x_0 = 0 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{ x }; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ $x_0 = 0 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x+1}; x \geq 0 \\ f(x) = 2x^2 + 4x + 2; x < 0 \end{cases} \quad x_0 = 1 \quad \begin{cases} f(x) = x^3 - 4x; x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 3x - 1; x > 1 \end{cases}$			
<p>تمرين 4: حدد مشتقات الدوال التالية (دون تحديد مجموعة التعريف):</p>			
$f(x) = \sin(x) + 3\cos(x)$	$f(x) = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}$	$f(x) = -5x^3 + 7x^2 - x$	$f(x) = -7x^3 + 13$
$f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(x + \frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{2x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$	$f(x) = \frac{2x - 3}{4x + 1}$	$f(x) = x \sin(x)$
$f(x) = \sqrt{2 - 3x}$	$f(x) = -2x\sqrt{x}$	$f(x) = (x^2 - 3)(4x - 5)$	$f(x) = \frac{3x + 2}{5x - 1}$
$f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{2x - \sqrt{x}}$	$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$	$f(x) = (2x + 3)^7$	$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$
$f(x) = \tan 3x + 4 \sin \frac{x}{2}$	$f(x) = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$	$f(x) = x(x^2 + 1)^2$	$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
$f(x) = \frac{2 + \cos x}{3 - \cos x}$	$f(x) = \sin x \cos 2x$	$f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}$	$f(x) = (\sin x + \cos x) \sin x$

تمرين 1: في كل التمرين سنرمز بـ (Δ) لمعادلة المماس في x_0

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 3x + 1 - (-3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 3x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(-x+4)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} -x + 4 = 5$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = -1$ و لدينا : $f'(-1) = 5$ منه : $(\Delta): y = 5(x+1) - 3$ أي $(\Delta): y = 5x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x-3} + 4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 12}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{x-3} = -6$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 2$ و لدينا : $f'(2) = -6$ منه : $(\Delta): y = -6(x-2) - 4$ أي $(\Delta): y = -6x + 8$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+7-9}{(x-1)(\sqrt{2x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt{2x+7}+3} = \frac{1}{3}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$ و لدينا : $f'(1) = \frac{1}{3}$ منه : $(\Delta): y = \frac{1}{3}(x-1) + 3$ أي $(\Delta): y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و لدينا : $f'(0) = 5$ منه : $(\Delta): y = 5(x-0) + 0$ أي $(\Delta): y = 5x$

$$\left(t = x - \frac{f}{2} \right) \lim_{x \rightarrow \frac{f}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{f}{2}\right)}{x - \frac{f}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{f}{2}} \frac{\cos^2(x)}{x - \frac{f}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^2\left(t - \frac{f}{2}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin(t) \times \frac{\sin(t)}{t} = 0 \times 1 = 0$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = \frac{f}{2}$ و لدينا : $f'\left(\frac{f}{2}\right) = 0$ منه : $(\Delta): y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{f}{8}} \frac{f(x) - f\left(\frac{f}{8}\right)}{x - \frac{f}{8}} = \lim_{x \rightarrow \frac{f}{8}} \frac{\tan(2x) - \tan\left(\frac{f}{4}\right)}{x - \frac{f}{8}} = \lim_{x \rightarrow \frac{f}{8}} \frac{\tan\left(2x - \frac{f}{4}\right) \left(1 + \tan(2x) \times \tan\left(\frac{f}{4}\right)\right)}{x - \frac{f}{8}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{f}{8}} \frac{f(x) - f\left(\frac{f}{8}\right)}{x - \frac{f}{8}} = \lim_{x \rightarrow \frac{f}{8}} 2 \frac{\tan\left(2x - \frac{f}{4}\right)}{2x - \frac{f}{4}} \times (1 + \tan(2x)) = 2 \times 1 \times 2 = 4$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = \frac{f}{8}$ و لدينا : $f'\left(\frac{f}{8}\right) = 4$ منه : $(\Delta): y = 4\left(x - \frac{f}{8}\right) + 1$ أي $(\Delta): y = 4x + \frac{2-f}{2}$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و لدينا : $x = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{x}} = +\infty$

دراسة قابلية الاشتقاق تعني دراسة النهاية : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ، في حالة كانت هذه النهاية عددا حقيقيا تكون معادلة

المماس : $(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ ورغم عدم قابلية الاشتقاق فمنحنى الدالة يقبل مماسا عموديا معادلته : $x = x_0$

تمرين 2 :

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$ إذن الدالة: $f(x) = \sqrt{1+x}$ قابلة للاشتقاق

في 0 و بذلك تكون الدالة التآلفية المماسية لها في النقطة 0 هي: $h(x) = \frac{1}{2}(x-0)+1 = \frac{1}{2}x+1$

$$\text{منه: } \sqrt{1,0002} = f(0,0002) \approx h(0,0002) \approx \frac{0,0002}{2} + 1 \approx 0,0001 + 1 \approx 1,0001$$

$$\text{و: } \sqrt{0,9996} = f(-0,0004) \approx h(-0,0004) \approx \frac{-0,0004}{2} + 1 \approx -0,0002 + 1 \approx 0,9998$$

1

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x+1} = -1$ إذن الدالة: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ قابلة للاشتقاق في 0 و بذلك

تكون الدالة التآلفية المماسية لها في النقطة 0 هي: $h(x) = -(x-0)+1 = -x+1$

$$\text{منه: } \frac{1}{1,015} = f(0,015) \approx -0,015 + 1 \approx 0,985$$

2

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ إذن الدالة: $f(x) = \sin x$ قابلة للاشتقاق في 0 و بذلك تكون الدالة التآلفية المماسية

لها في النقطة 0 هي: $h(x) = x$

$$\text{منه: } \sin(0,02) = f(0,02) \approx 0,02 \quad \cos 0,02 = \sqrt{1 - \sin^2(0,02)} \approx \sqrt{1 - 0,0004} \approx \sqrt{0,9996} \approx 0,9998$$

3

ضمنيا في هذا السؤال وحدة القياس هي الراديان

لاحظ أننا استعملنا بعض نتائج السؤال الأول في الاستنتاج

تمرين 3: في كل التمرين سنرمز ب (Δ) لمعادلة المماس في x_0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و لدينا: $f'(0) = 0$ منه: $(\Delta): y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و لدينا: $f'(0) = \frac{1}{2}$ منه: $(\Delta): y = \frac{1}{2}x$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^3 - 4x + 3}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x^2 + x - 3 = -1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x - 2 = -1 \quad \text{و}$$

بما أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -1$ فإن f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$

و لدينا: $f'(0) = -1$ منه: $(\Delta): y = -(x-1) - 3$ أي $(\Delta): y = -x - 2$

صورة العدد 1 تم حسابها بالصيغة الأولى لأنها معرفة على مجال يحتوي على العدد 1

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-x}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{x+1} = -1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{2x^2 + 4x + 1}{x} = -\infty$$

و

إذن f غير قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$

في السنة الثانية بكالوريا دائما يسبق دراسة الاشتقاق في نقطة دراسة اتصالها في هذه النقطة، لكن مفهوم الاتصال لا يدس في

هذه السنة، في المثال الأخير رغم أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ إلا أنه لا يوجد مماس عمودي بسبب عدم اتصال الدالة في الصفر.

تمرين 4 :

$$f'(x) = (-7x^3 + 13)' = -21x^2$$

$$f'(x) = (-5x^3 + 7x^2 - x)' = -15x^2 + 14x - 1$$

$$f'(x) = \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = 4 \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = (\sin(x) + 3\cos(x))' = \cos(x) - 3\sin(x)$$

$$f'(x) = (x \sin(x))'$$

$$f'(x) = x' \sin(x) + x(\sin(x))' = \sin x + x \cos x$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x-3}{4x+1}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)'(4x+1) - (2x-3)(4x+1)'}{(4x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(4x+1) - 4(2x-3)}{(4x+1)^2} = \frac{14}{(4x+1)^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x^3 + x + 1}{x^2 + 1}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{(6x^2 + 1)(x^2 + 1) - 2x(2x^3 + x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^4 + 6x^2 + x^2 + 1 - 4x^4 - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 + 5x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \left[\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3x+2}{5x-1}\right)' = \frac{3(5x-1) - 5(3x+2)}{(5x-1)^2} = \frac{-13}{(5x-1)^2}$$

$$f'(x) = [(x^2 - 3)(4x - 5)]' = 2x(4x - 5) + 4(x^2 - 3)$$

$$f'(x) = 12x^2 - 10x - 12$$

$$f'(x) = (-2x\sqrt{x})' = -2\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$f'(x) = -2 \frac{3x}{2\sqrt{x}} = -3\sqrt{x}$$

$$f'(x) = (\sqrt{2-3x})' = \frac{(2-3x)'}{2\sqrt{2-3x}} = \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)' = \frac{(x^2 + 2x + 2)'}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

$$f'(x) = ((2x+3)^7)' = 7(2x+3)^6 (2x+3)'$$

$$f'(x) = 14(2x+3)^6$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2 - x + 1) - (2x-1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 2x^2 + 2}{(x^2 - x + 1)^2} = f'(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x + \sqrt{x}}{2x - \sqrt{x}} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2x - \sqrt{x}) - \left(2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x + \sqrt{x})}{(2x - \sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' = \frac{\left(\frac{1-x}{1+x} \right)'}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} \cdot \frac{2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-\sqrt{1-x}}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = (x(x^2 + 1)^2)'$$

$$f'(x) = x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^3 + 4x$$

$$f'(x) = (\sin^2 x + 2\cos^2 x)'$$

$$f'(x) = 2\sin x \cos x + 2(2\cos x(-\sin x))$$

$$f'(x) = -3\sin x \cos x$$

$$f'(x) = \left(\tan 3x + 4\sin \frac{x}{2} \right)'$$

$$f'(x) = 3 \times \frac{1}{\cos^2 3x} + 4 \times \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x} + 2 \cos \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = [(\sin x + \cos x)\sin x]'$$

$$f'(x) = (\cos x - \sin x)\sin x + (\sin x + \cos x)\cos x$$

$$f'(x) = 2\sin x \cos x - \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}$$

$$f'(x) = (\sin x \cos 2x)'$$

$$f'(x) = \cos x \cos 2x - 2\sin x \sin 2x$$

$$f'(x) = \left(\frac{2 + \cos x}{3 - \cos x} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x(3 - \cos x) - \sin x(2 + \cos x)}{(3 - \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5\sin x}{(3 - \cos x)^2}$$

أحيانا نتجاوز بعض التفاصيل لكونها واضحة أو سبق توضيحها في مثال سابق 🌱

للتذكير: 🌱 $(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ، $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ، $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u.v'}{v^2}$ ، $(u.v)' = u'v + u.v'$ ، $(u+v)' = u' + v'$

$$(u(ax+b))' = a u'(ax+b)$$