السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية	سلسلة 3

تمرين 1 :

نضع $w=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ، نعتبر المجموعين :

$$\begin{cases} A=1+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \\ B=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \end{cases}$$

1) احسب A

2) بين أن $A+iB=\frac{1-w^5}{1-w}$ ثم استنتج أن : $iB=\frac{1+w}{1-w}$

3) اكتب على الشكل المثلثي كلا من $1-w$ و $1+w$

4) استنتج حساب B

5) احسب : $C=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

تمرين 2 : نضع $w=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

1) بين أن : $w^2+\frac{1}{w^2}-\left(w+\frac{1}{w}\right)+1=0$

2) نضع $z=w+\frac{1}{w}$

أ) تحقق أن : $z^2-z-1=0$ ثم استنتج القيم الممكنة للعدد z

ب) تحقق أن : $w+\frac{1}{w}=2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

3) حدد النسب المثلثية للزاوية $\frac{\pi}{5}$

تمرين 3 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ ، ليكن $(n,\theta)\in IN^*\times IR$

نعتبر الأعداد : $z_k=\left[1;\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]\ /\ k\in\{1;2...;n\}$ ، و نعتبر في المستوى العقدي النقط M_1 و M_2 و ... و M_n

ذات الألحاق على التوالي : $(z_1+1)^n$ و $(z_2+1)^n$ و ... و $(z_n+1)^n$

- بين أن النقط M_1 و M_2 و ... و M_n مستقيمية

تمرين 4 : نعتبر العدد : $Z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ حيث $\alpha\in\left]-\pi;\pi\right]$

اكتب على الشكل المثلثي العدد $1+Z+Z^2$

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية حلول مقترحة	سلسلة 3

تمرين 1 : $w=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ،
$$\begin{cases} A=1+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ B=\quad\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{cases}$$

1

$$A=1+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$
$$A=1+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$$
$$A=1+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$A=1$$

2

$$A+i\,B=1+\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]+\left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]+\left[\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right]\left[+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right]$$
$$A+i\,B=1+w+w^2+w^3+w^4=\frac{1-w^5}{1-w}$$

بما أن $w^5=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1$ فإن : $A+i\,B=\frac{2}{1-w}$ منه : $i\,B=\frac{2}{1-w}-A=\frac{2}{1-w}-1=\frac{1+w}{1-w}$

3

$$1-w=1-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)i=2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)i\right)$$
$$1-w=2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)i\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)i\right)$$
$$1-w=\left[2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right);\frac{-2\pi}{5}\right]$$

$$1+w=1+\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)i=2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)i\right)$$
$$1+w=\left[2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right);\frac{\pi}{10}\right]$$

4

$$i\,B=\frac{\left[2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right);\frac{\pi}{10}\right]}{\left[2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right);\frac{-2\pi}{5}\right]}=\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)};\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}\right]=\left[\text{cotan}\left(\frac{\pi}{10}\right);\frac{\pi}{2}\right]=i\ \text{cotan}\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

بالتالي : $B=\text{cotan}\left(\frac{\pi}{10}\right)$

للتذكير ، $\text{cotan}(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}$ (ليس من الضروري استعماله، لكنه يجعل الصيغة أكثر بساطة)

5

لدينا: $B=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

$B=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$

$B=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$B=2C$

بالتالي: $C=\frac{B}{2}=\frac{\cot an\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2}$

تمرين 2: $w=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\boldsymbol{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

1

لدينا:

$$w^2+\frac{1}{w^2}-\left(w+\frac{1}{w}\right)+1=\frac{w^4+1-w^3-w+w^2}{w^2}=\frac{1+(-w)+(-w)^2+(-w)^3+(-w)^4}{w^2}$$

$$w^2+\frac{1}{w^2}-\left(w+\frac{1}{w}\right)+1=\frac{1}{w^2}\times\frac{1-(-w)^5}{1-(-w)}=\frac{1}{w^2}\times\frac{1+w^5}{1+w}$$

وبما أن $w^5=\cos(\pi)+\boldsymbol{i}\sin(\pi)=-1$ فإن: $w^2+\frac{1}{w^2}-\left(w+\frac{1}{w}\right)+1=0$

2

أ) لدينا $z=w+\frac{1}{w}$ منه:

$$z^2-z-1=\left(w+\frac{1}{w}\right)^2-\left(w+\frac{1}{w}\right)-1=w^2+2+\frac{1}{w^2}-\left(w+\frac{1}{w}\right)-1=w^2+\frac{1}{w^2}-\left(w+\frac{1}{w}\right)+1=0$$

إذن z هو حل للمعادلة: $z^2-z-1=0$ ، $\Delta=1+4=5$ منه: $z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أو $z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ب) لدينا: $w+\frac{1}{w}=w+w^{-1}=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\boldsymbol{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{-\pi}{5}\right)+\boldsymbol{i}\,\sin\left(\frac{-\pi}{5}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

3

من أ) و ب) نستنتج أن: أو $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

لكن وبما أن $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$ (لأن $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$) فإن: $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ بالتالي: $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

منه: $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{16-1-2\sqrt{5}-5}{16}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{2\left(5-\sqrt{5}\right)}}{4}$

ومنه: $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

- $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ لأن: $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$
- تجاوزت بعض حسابات الجذور المربعة

تمرين 3 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ، ليكن $(n,\sim)\in IN^*\times IR$

لدينا لكل $k\in\{1;2...;n\}$:

$$z_k+1=1+\cos\left(\frac{\sim}{n}+\frac{2k\text{®}}{n}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\sim}{n}+\frac{2k\text{®}}{n}\right)=2\cos^2\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{k\text{®}}{n}\right)+2\sin\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{k\text{®}}{n}\right)\sin\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{k\text{®}}{n}\right)\boldsymbol{i}$$

$$z_k+1=2\cos\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{k\text{®}}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{k\text{®}}{n}\right)+\sin\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{k\text{®}}{n}\right)\boldsymbol{i}\right)$$

منه : $$(z_k+1)^n=2^n\cos^n\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{k\text{®}}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\sim}{2}+k\text{®}\right)+\sin\left(\frac{\sim}{2}+k\text{®}\right)\boldsymbol{i}\right)$$

<u>طريقة 1</u>

- إذا كان : $\cos^n\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{k\text{®}}{n}\right)>0$ فإن : $\arg\left((z_k+1)^n\right)\equiv 0+\frac{\sim}{2}+k\text{®}[2\text{®}]\equiv\frac{\sim}{2}[\text{®}]$
- إذا كان : $\cos^n\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{k\text{®}}{n}\right)<0$ فإن : $\arg\left((z_k+1)^n\right)\equiv \text{®}+\frac{\sim}{2}+k\text{®}[2\text{®}]\equiv\frac{\sim}{2}[\text{®}]$
- إذا كان : $\cos^n\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{k\text{®}}{n}\right)=0$ فإن : $(z_k+1)^n=0$

في كل الحالات نجد أن M_k إما تنطبق مع O أو تنتمي للمستقيم المار من O و الذي يكون الزاوية $\frac{\sim}{2}$ مع $(O,\vec{e_1})$ ، بالتالي النقط M_1 و M_2 و ... و M_n مستقيمية

<u>طريقة 2</u>: لدينا لكل $p,q\in\{1;2...;n\}$

$$\frac{(z_p+1)^n}{(z_q+1)^n}=\frac{2^n\cos^n\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{p\text{®}}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\sim}{2}+p\text{®}\right)+\sin\left(\frac{\sim}{2}+p\text{®}\right)\boldsymbol{i}\right)}{2^n\cos^n\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{q\text{®}}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\sim}{2}+q\text{®}\right)+\sin\left(\frac{\sim}{2}+q\text{®}\right)\boldsymbol{i}\right)}=\frac{\cos^n\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{p\text{®}}{n}\right)}{\cos^n\left(\frac{\sim}{2n}+\frac{q\text{®}}{n}\right)}[1;(p-q)\text{®}]\in IR$$

إذن لكل $p,q\in\{1;2...;n\}$ M_p و M_q مستقيمية مع O ، بالتالي النقط M_1 و M_2 و ... و M_n مستقيمية

للتذكير $[r;k\text{®}]\in IR$ $\quad\forall r\in IR^*\ \forall k\in Z$

تمرين 4 : نعتبر العدد : $Z=\cos\text{¯}+\boldsymbol{i}\sin\text{¯}$ حيث $\text{¯}\in]-\text{®};\text{®}]$

لدينا $|Z|=1$ منه : $Z\overline{Z}=1$ منه : $1+Z+Z^2=Z\overline{Z}+Z+Z^2=Z\left(\overline{Z}+1+Z\right)=\left(1+Z+\overline{\overline{Z}}\right)Z=(1+2\cos\text{¯})Z$

- إذا كان : $\cos\text{¯}=\frac{-1}{2}$ فإن : $1+Z+Z^2=0$ (لا يمكن كتابته على الشكل المثلثي)
- إذا كان : $\cos\text{¯}>\frac{-1}{2}$ فإن : $1+Z+Z^2=[1+2\cos\text{¯};\text{¯}]$
- إذا كان : $\cos\text{¯}<\frac{-1}{2}$ فإن : $1+Z+Z^2=[-(1+2\cos\text{¯});\text{¯}+\text{®}]$

الشكل المثلثي $r(\cos\text{¯}+\boldsymbol{i}\sin\text{¯})$ يستوجب أن يكون $r>0$ ، فإذا كان سالبا يكون لدينا :

$$r(\cos\text{¯}+\boldsymbol{i}\sin\text{¯})=(-r)\times(-1)\times[1;\text{¯}]=[-r;0]\times[1;\text{®}]\times[1;\text{¯}]=[-r;\text{¯}+\text{®}]$$

الشكل الأسي لا يستوجب الشرط السابق