سلسلة 2	الأعداد العقدية	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : اكتب الأعداد التالية على شكلها المثلثي.

$z_1 = 3+3\boldsymbol{i}$ ، $z_2 = 1-\boldsymbol{i}$ ، $z_3 = -\sqrt{3}-\boldsymbol{i}$ ، $z_4 = -\sqrt{2}+\sqrt{6}\,\boldsymbol{i}$ ، $z_5 = \frac{1}{7}+\frac{1}{7}\,\boldsymbol{i}$

$z_6 = -\cos(\sim)-\boldsymbol{i}\,\sin(\sim)$ ، $z_7 = \sin(\sim)+\boldsymbol{i}\,\cos(\sim)$ ، $z_8 = 1-\cos(2\ \ )+\boldsymbol{i}\,\sin(2\ \ )$

$z_9 = \cos(\sim)+\cos(\ \ )+\boldsymbol{i}\,(\sin(\sim)+\sin(\ \ ))$ حيث $(\sim,\ \ ) \in \left]0,\frac{®}{2}\right[^2$ و $\sim >$

تمرين 2 : نعتبر العددين : $u = \sqrt{2+\sqrt{3}}+\boldsymbol{i}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1) احسب u^2 ثم اكتبه على الشكل المثلثي.

2) اكتب u على الشكل المثلثي.

تمرين 3 : نعتبر العددين العقديين التاليين : $u = \frac{\sqrt{3}+\boldsymbol{i}}{2}$ ، $v = \frac{\sqrt{2}+\boldsymbol{i}\sqrt{2}}{2}$

1) حدد معيار وعمدة العددين u و v

2) بين أن : $\left(\frac{\sqrt{3}+\boldsymbol{i}}{\sqrt{2}+\boldsymbol{i}\sqrt{2}}\right)^{12} = -1$

3) حدد قيم العدد الصحيح النسبي m الذي من أجله يكون $\left(\sqrt{3}+\boldsymbol{i}\right)^m \in IR$

4) بين أن : $\forall n\in IN\ \ (1+\boldsymbol{i})^n+(1-\boldsymbol{i})^n = 2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cos\left(\frac{®\,n}{4}\right)$

5) احسب المجموع : $S = 1+v+v^2+v^3+\ldots+v^{2014}$ ثم احسب : $|S|$

تمرين 4 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. حدد المجموعات التالية:

$E = \left\{M(z)\ /\ \arg(z)\equiv\frac{®}{5}\ [2®]\right\}$ و $F = \left\{M(z)\ /\ \arg(z-1+\boldsymbol{i})\equiv\frac{®}{4}\ [2®]\right\}$

و $G = \left\{M(z)\ /\ \arg(z-2\boldsymbol{i})^2\equiv\frac{®}{3}\ [2®]\right\}$

تمرين 5 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ونعتبر العدد العقدي $\boldsymbol{j} = \frac{-1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) أكتب العدد العقدي $\boldsymbol{j}$ و $\overline{\boldsymbol{j}}$ على الشكل المثلثي

2) نعتبر النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ حيث a و b و c أعداد عقدية معلومة

بين أن المثلث ABC يكون متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان : $c-b=\boldsymbol{j}\,(a-c)$ أو $c-b=\overline{\boldsymbol{j}}\,(a-c)$

3) ABC مثلث متساوي الأضلاع ، E مماثلة A بالنسبة لـ B ، F مماثلة B بالنسبة لـ C ، G مماثلة C بالنسبة لـ A

بين أن EFG مثلث متساوي الأضلاع.

سلسلة 2	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 :

$$z_1=3+3i=3(1+i)=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[3\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_2=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_3=-\sqrt{3}-i=2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=\left[2;\frac{7\pi}{6}\right]$$

$$z_4=-\sqrt{2}+\sqrt{6}i=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\left[2\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_5=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}i=\frac{1}{7}(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left[\frac{\sqrt{2}}{7};\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_6=-\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)=\cos(\alpha+\pi)+i\sin(\alpha+\pi)=[1;\alpha+\pi]$$

$$z_7=\sin(\alpha)+i\cos(\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\left[1;\frac{\pi}{2}-\alpha\right]$$

$$z_8=1-\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)=2\sin^2(\theta)+2\sin(\theta)\cos(\theta)i=2\sin(\theta)(\sin(\theta)+i\cos(\theta))$$

$$z_8=2\sin(\theta)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\left[2\sin(\theta);\frac{\pi}{2}-\theta\right]$$

(لأن: $2\sin(\theta)>0 \Leftarrow \theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$)

$$z_9=\cos(\alpha)+\cos(\beta)+i(\sin(\alpha)+\sin(\beta))=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+2i\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$z_9=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)=\left[2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right);\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

(لأن: $(\alpha,\beta)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[^2 \Rightarrow \begin{cases}0<\alpha<\frac{\pi}{2}\\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow 0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>0$)

- للتذكير،للحصول على الشكل المثلثي للعدد : $z=a+ib$ نعمل بمعيار العدد z أي نكتب: $z=r\left(\frac{a}{r}+i\frac{b}{r}\right)$
حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ثم نبحث في جدول القيم الهامة عن الزاوية α التي تحقق : $\cos(\alpha)=\frac{a}{r}$ و $\sin(\alpha)=\frac{b}{r}$
- ليس من الضروري اتباع الطريقة السابقة في كل الحالات، فمثلا إن تبين لنا عامل مشترك نعمل به أولا ثم نطبق الطريقة على العامل المحصل عليه (مثل z_1 و z_5)
- حالات خاصة : $a=[a,0]$; $-a=[a,\pi]$; $ai=\left[a,\frac{\pi}{2}\right]$; $-ai=\left[a,-\frac{\pi}{2}\right]$ $\quad\forall a\in IR^{+*}$
- يمكن استعمال خاصيات الكتابة المثلثية أحيانا لتحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي، مثلا :

$$z_3=-\sqrt{3}-i=-(\sqrt{3}+i)=-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=[-2;\pi]\times\left[1;\frac{\pi}{6}\right]=[-2;\pi]\times\left[2\times1;\pi+\frac{\pi}{6}\right]=\left[2;\frac{5\pi}{6}\right]$$

تمرين 2 : $u=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1

$$u^2=2+\sqrt{3}+2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}-\left(2-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\left[4;\frac{®}{6}\right]$$

2

نضع : $u=[r\ ,\sim]$ حيث : $r\in IR^{*+}$ و $\sim\in\left]-®;®\right]$

إذن : $u^2=\left[r^2\ ,\ 2\sim\right]$ منه: $\begin{cases}r^2=4\\ 2\sim\equiv\frac{®}{6}[2®]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}r=2\\ \sim\equiv\frac{®}{12}[®]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}r=2\\ \sim\equiv\frac{®}{12}+k®\ /\ k\in Z\end{cases}$

$$\begin{cases}\sim\in\left]-®;®\right]\\ \sim\equiv\frac{®}{12}+k®\ /\ k\in Z\end{cases}\Rightarrow-®<\frac{®}{12}+k®\le®\ \Rightarrow-1-\frac{1}{12}<k\le1-\frac{1}{12}\ \Rightarrow\frac{-13}{12}<k\le\frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow(k=0\ \ ou\ \ k=-1)\Rightarrow\left(\sim=\frac{®}{12}\ \ ou\sim=\frac{13®}{12}\right)$$

بما أن : $r\cos(\sim)=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و $r\sin(\sim)=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ فإن : $\cos(\sim)>0$ و $\sin(\sim)>0$

إذن : $\sim=\frac{®}{12}$ (لأن: $\cos\left(\frac{13®}{12}\right)<0\ \Rightarrow\ \frac{®}{2}<\frac{13®}{12}<\frac{3®}{2}$) ، بالتالي: $u=\left[2\ ,\ \frac{®}{12}\right]$

تمرين 3 : $u=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ ، $v=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$

1

$u=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\left[1;\frac{®}{6}\right]$ ، $v=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\left[1;\frac{®}{4}\right]$

2

لدينا : $\left(\frac{u}{v}\right)^{12}=\left(\frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}}\right)^{12}=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{12}$ ، وبما أن : $\frac{u}{v}=\left[\frac{1}{1}\ ;\ \frac{®}{6}-\frac{®}{4}\right]=\left[1\ ;\ \frac{-®}{12}\right]$

فإن : $\left(\frac{u}{v}\right)^{12}=\left[1^{12}\ ;12\times\frac{-®}{12}\right]=[1\ ;-®]=-1$ ، بالتالي : $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{12}-1$

3

لدينا : $\left(\sqrt{3}+i\right)^m=2^m\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^m=2^m\left[1;\frac{®}{6}\right]^m=2^m\left[1;\frac{®}{6}m\right]=2^m\left(\cos\left(\frac{®\ m}{6}\right)+i\ \sin\left(\frac{®\ m}{6}\right)\right)$ ،إذن:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^m\in IR\ \Leftrightarrow\ Im\left(\left(\sqrt{3}+i\right)^m\right)=0\ \Leftrightarrow\ \sin\left(\frac{®\ m}{6}\right)=0\ \Leftrightarrow\ \frac{®\ m}{6}=k®\ \ /\ k\in Z\ \Leftrightarrow\ m=6k\ /\ k\in Z$$

4

$$(1+i)^n+(1-i)^n=2^n\left(\left(\frac{1+i}{2}\right)^n+\left(\frac{1-i}{2}\right)^n\right)=2^n\left(\left[1\ ;\frac{®\ n}{4}\right]+\left[1\ ;\frac{-®\ n}{4}\right]\right)$$

لدينا لكل $\forall n\in IN$:

$$=2^n\left(\cos\left(\frac{®\ n}{4}\right)+i\ \sin\left(\frac{®\ n}{4}\right)+\cos\left(\frac{-®\ n}{4}\right)+i\ \sin\left(\frac{-®\ n}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^n+(1-i)^n=2^n\times2\cos\left(\frac{®\ n}{4}\right)=2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cos\left(\frac{®\ n}{4}\right)$$

5

لدينا : $v=\left[1\ ;\frac{®}{4}\right]$ منه : $v^4=[1\ ;®]=-1$ ، الآن بما أن $v\neq1$ فإن :

$$S=1+v+v^2+v^3+\ldots+v^{2014}=1\times\frac{1-v^{2015}}{1-v}=\frac{1-v^{2012}\times v^3}{1-v}=\frac{1-\left(v^4\right)^{503}\times v^3}{1-v}$$

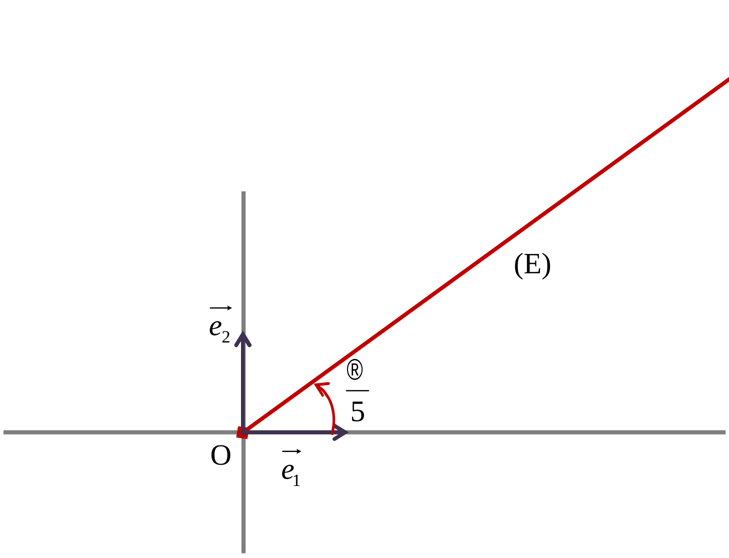
$$S=\frac{1-(-1)^{503}\times v^3}{1-v}=\frac{1+v^3}{1-v}=\frac{v+v^4}{v(1-v)}=\frac{v-1}{v(1-v)}=\frac{-1}{v}=\frac{[1\,;\text{®}]}{\left[1\,;\frac{\text{®}}{4}\right]}=\left[1\,;\frac{3\text{®}}{4}\right]=\frac{-\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|S|=1$$

<u>تمرين 4</u> : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$

$$E=\left\{M(z)\,/\,\arg(z)\equiv\frac{\text{®}}{5}\,[2\text{®}]\right\}=\left\{M(z)\,/\,\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)\equiv\frac{\text{®}}{5}\,[2\text{®}]\right\}$$

إذن : E هي نصف المستقيم الذي أصله O (والمحروم منه) والذي يكون مع $\vec{e}_1$ الزاوية : $\frac{\text{®}}{5}$

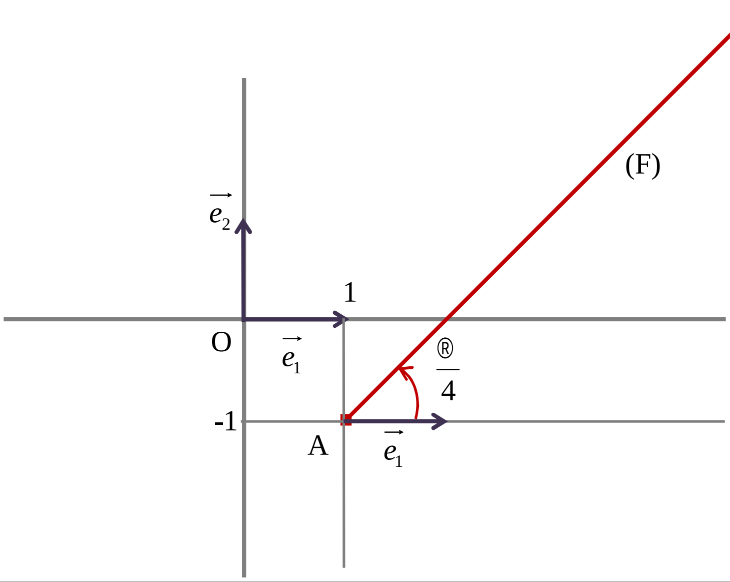


$$F=\left\{M(z)\,/\,\arg(z-1+\boldsymbol{i})\equiv\frac{\text{®}}{4}\,[2\text{®}]\right\}=\left\{M(z)\,/\,\arg(z-(1-\boldsymbol{i}))\equiv\frac{\text{®}}{4}\,[2\text{®}]\right\}$$

نعتبر النقطة : $A(1-\boldsymbol{i})$ ، إذن:

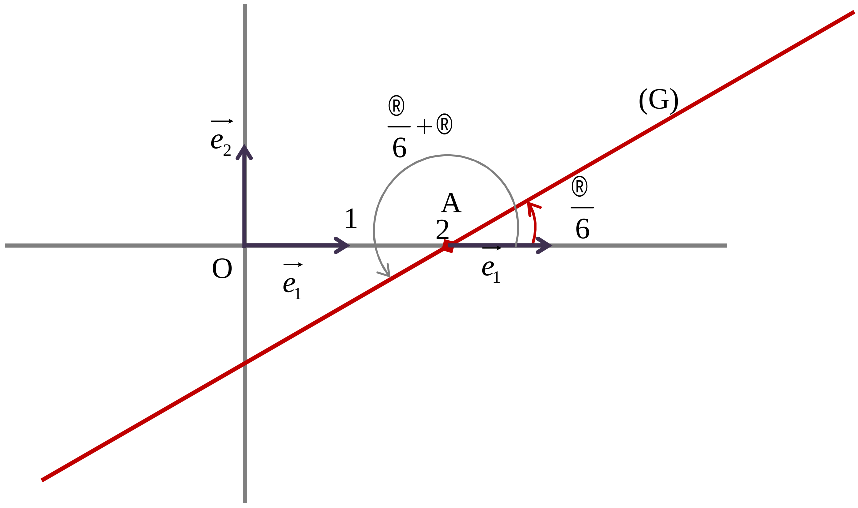
$$F=\left\{M(z)\,/\,\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{\text{®}}{4}\,[2\text{®}]\right\}$$

إذن : F هي نصف المستقيم الذي أصله A (والمحروم منه) والذي يكون مع $\vec{e}_1$ الزاوية : $\frac{\text{®}}{4}$



$$G=\left\{M(z)\ /\ \arg(z-2\boldsymbol{i})^2\equiv\frac{®}{3}\,[2®]\right\}=\left\{M(z)\ /\ 2\arg(z-2\boldsymbol{i})\equiv\frac{®}{3}\,[2®]\right\}=\left\{M(z)\ /\ \arg(z-2\boldsymbol{i})\equiv\frac{®}{6}\,[®]\right\}$$

إذن باعتبار النقطة $A(2\boldsymbol{i})$ ، فإننا نستنتج أن G هي المستقيم المار من A (و المحروم منها) و الذي يكون مع $\vec{e}_1$ الزاوية : $\frac{®}{6}$



<u>تمرين 5</u> : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ ، $\boldsymbol{j}=\frac{-1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

1

$$\boldsymbol{j}=\frac{-1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\left[1;\frac{2®}{3}\right] \quad ، \quad \overline{\boldsymbol{j}}=\frac{-1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\left[1;\frac{4®}{3}\right]$$

2

$A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ حيث a و b و c أعداد عقدية معلومة

المثلث ABC متساوي الأضلاع يعني : $AC=BC$ و $A\hat{C}B=\frac{®}{3}$

يعني : $AC=BC$ و $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{®}{3}[2®]$ أو $AC=BC$ و $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{-®}{3}[2®]$

يعني : $|c-a|=|c-b|$ و $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=\frac{®}{3}[2®]$ أو $|c-a|=|c-b|$ و $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=\frac{-®}{3}[2®]$

يعني : $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(-\left(\frac{c-b}{a-c}\right)\right)=\frac{®}{3}[2®]$ أو $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(-\left(\frac{c-b}{a-c}\right)\right)=\frac{-®}{3}[2®]$

يعني : $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right)-®=\frac{®}{3}[2®]$ أو $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right)-®=\frac{-®}{3}[2®]$

يعني : $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right)=\frac{4®}{3}[2®]$ أو $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right)=\frac{2®}{3}[2®]$

يعني : $\frac{c-b}{a-c}=\boldsymbol{j}$ أو $\frac{c-b}{a-c}=\overline{\boldsymbol{j}}$ ، يعني : $c-b=\boldsymbol{j}\,(a-c)$ أو $c-b=\overline{\boldsymbol{j}}\,(a-c)$

للتذكير ،يكون مثلث متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كانت إحدى العبارات التالية صحيحة :

1) جميع أضلاعه متقايسة 2) جميع زواياه متقايسة 3) يوجد ضلعان متقايسان و الزاوية المحصورة بينهما قياسها $60°$

$\arg(-z)=\arg(-1\times z)=\arg(-1)+\arg(z)=®+\arg(z)$

$\arg(-z)=\arg\left(\frac{z}{-1}\right)=\arg(z)-\arg(-1)=\arg(z)-®$

3

نعتبر في المستوى العقدي: $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ و $E(e)$ و $F(f)$ و $G(g)$ حيث a و b و c و e و f و g أعداد عقدية.

لدينا E مماثلة A بالنسبة لـ B إذن: A منتصف $[BE]$ منه: $a=\dfrac{e+b}{2}$ منه: $e=2a-b$

لدينا F مماثلة B بالنسبة لـ C إذن: B منتصف $[CF]$ منه: $b=\dfrac{f+c}{2}$ منه: $f=2b-c$

لدينا G مماثلة C بالنسبة لـ A إذن: C منتصف $[AG]$ منه: $c=\dfrac{g+a}{2}$ منه: $g=2c-a$

بما أن ABC مثلث متساوي الأضلاع فإن: $c-b=\boldsymbol{j}\,(a-c)$ أو $c-b=\overline{\boldsymbol{j}}\,(a-c)$

- إذا كان: $c-b=\boldsymbol{j}\,(a-c)$، منه: $b=c-\boldsymbol{j}\,(a-c)=(1+\boldsymbol{j})c-\boldsymbol{j}\,a$

$$\frac{g-f}{e-g}=\frac{2c-a-2b+c}{2a-b-2c+a}=\frac{2(c-b)+(c-a)}{3a-3c-b+c}=\frac{2\boldsymbol{j}\,(a-c)+(c-a)}{3(a-c)+(c-b)}=\frac{(a-c)(2\boldsymbol{j}-1)}{3(a-c)+\boldsymbol{j}\,(a-c)}$$

$$\frac{g-f}{e-g}=\frac{(a-c)(2\boldsymbol{j}-1)}{(a-c)(3+\boldsymbol{j})}=\frac{2\boldsymbol{j}-1}{3+\boldsymbol{j}}$$

وحيث أن: $j^2+j+1=0$ (راجع التمرين 3 من السلسلة 1) فإن: $\boldsymbol{j}\,(3+\boldsymbol{j})=3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}^2=3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{j}-1=2\boldsymbol{j}-1$

إذن: $\dfrac{2\boldsymbol{j}-1}{3+\boldsymbol{j}}=\boldsymbol{j}$ إذن: $\dfrac{g-f}{e-g}=\boldsymbol{j}$

- إذا كان: $c-b=\overline{\boldsymbol{j}}\,(a-c)$، منه: $b=c-\boldsymbol{j}\,(a-c)=(1+\overline{\boldsymbol{j}})c-\overline{\boldsymbol{j}}\,a$

$$\frac{g-f}{e-g}=\frac{2c-a-2b+c}{2a-b-2c+a}=\frac{2(c-b)+(c-a)}{3a-3c-b+c}=\frac{2\overline{\boldsymbol{j}}\,(a-c)+(c-a)}{3(a-c)+(c-b)}=\frac{(a-c)(2\overline{\boldsymbol{j}}-1)}{3(a-c)+\overline{\boldsymbol{j}}\,(a-c)}$$

$$\frac{g-f}{e-g}=\frac{(a-c)(2\overline{\boldsymbol{j}}-1)}{(a-c)(3+\overline{\boldsymbol{j}})}=\overline{\left(\frac{2\boldsymbol{j}-1}{3+\boldsymbol{j}}\right)}=\overline{\boldsymbol{j}}$$

في جميع الحالات نجد أن: $\dfrac{g-f}{e-g}=\boldsymbol{j}$ أو $\dfrac{g-f}{e-g}=\overline{\boldsymbol{j}}$، بالتالي EFG هو أيضا مثلث متساوي الأضلاع.

التمرين رغم أنه يبدو صعبا لكنه مثال جيد لتوضيح أهمية الأعداد العقدية في حل كثير من المسائل الهندسية في أسطر قليلة، كما يوضح أهمية العدد $\boldsymbol{j}$ الذي أدرجنا بعض خواصه في تمرين سابق و التي من المستحسن حفظها و استعمالها عند الحاجة.