Résumé Cours sur les nombres complexes (Partie 2)

PROF : ATMANI NAJIB   2ème BAC Sciences maths

NOMBRES COMPLEXES(2)

G) arguments et interpretations geometriques

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ et Soient M et M' et A, B, C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs z, z', a, b, c et d on a :

1) $\left(\overline{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi]$

2) $\left(\overline{\vec{e_1};\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(b-a)[2\pi]$

3) $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

4) $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$

5) $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si :
$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0[2\pi]$

6) $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ et D(d)

$(\mathrm{AB}) \parallel (CD)$ si et seulement si : $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv 0[2\pi]$

Ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \pi[2\pi]$

7) $(\mathrm{AB}) \perp (CD)$ ssi : $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

8)Soit (C) le cercle qui circonscrit le triangle ABC, le point D appartient au cercle (C)
si et seulement si :

$\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}\right)[2\pi]$ ou $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \pi - \left(\overline{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}\right)[2\pi]$

9) Les points A,B,C et D sont cocycliques si et seulement si
$\frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-d}{c-d} \in \mathbb{R}^*$

H) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE NON NUL :1) Soit θ un réel on pose : $cos\theta + i\ sin\theta = e^{i\theta}$

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a :

$z = r(cos\theta + i\ sin\theta) = re^{i\theta}$ Cette écriture s'appelle la forme exponentielle

2) Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

a) $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ b) $z^n = r^n e^{in\theta}$ c) $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$

d) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ e) $\overline{z} = re^{-i\theta}$ f) $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

g) Pour tout réel θ on a : $\left(re^{i\theta}\right)^n = (r)^n\ re^{in\theta}$

d'où : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall\theta \in \mathbb{R}$

(Formule de Moivre

h) Formule d'Euler : Pour tout réel θ on a :

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

$(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

I) LES EQUATION DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$:

1) Les équations de second degré

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E) où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

on a :**Si Δ = 0** alors l'équation (E) admet comme solution le complexe $z = -\frac{b}{2a}$

Si Δ ≠ 0 l'équation (E) admet comme solution les complexes $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où δ une racine carrées de Δ

Remarque : Si les coefficients a, $b$et c sont des réels et $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c =$ admet deux racines complexes conjugué $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

J) LES RACINES n-EME D'UN COMPLEXE NON NUL

1) Les racines n-ième de l'unité :

a)On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe u qui vérifie : $u^n = 1$

b)L'unité admet n racines n-ème qui s'écrivent de la forme :

$u_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ Où $k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$

2) Les racines n-ème d'un nombre complexe non nul.

Le nombre complexe non nul $a = re^{\theta i}$ admet n racines $n-éme$ ($n \in \mathbb{N}*$) differentes qui sont :

$u_k = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}$ où $k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$

K) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation : Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que : $aff(\vec{u}) = a$; la Translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ si et seulement si :$z' = z + a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ tel que $\boldsymbol{aff}(\vec{u}) = \boldsymbol{a}$

2) L'homothétie : l'homothétie de centre Ω(ω) et de Rapport k, admet une écriture complexe de la forme : $z' = kz + \omega(1-k)$

3) La rotation : La rotation de centre Ω(ω) et d'angle θ, admet une écriture complexe de la forme :

$$z' = (z-\omega)e^{\theta i} + \omega$$

L) Etude de la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que: $z' = az + b$; $b \in \mathbb{C}$

1er cas: $a = 0$

La transformation f est une constante, elle lie chaque point $M(z)$ au point fixe $B(b)$

2eme cas: $a = 1$

f est la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que $z' = z + b$

Dans ce cas la transformation f est une translation de vecteur $\vec{u}$ tel que : $aff(\vec{u}) = b$

3éme cas : $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = az + b$

Soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a :Le point $\Omega(\omega)$ est un point invariant par f et on a : $z' - \omega = a(z - \omega)$ qui se traduit par $\overrightarrow{\Omega M'} = a\overrightarrow{\Omega M}$ donc :f est l'homothétie de centre Ω(ω) et de rapport a où $\omega = \frac{b}{1-a}$

4éme cas : $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$

$\omega = \frac{b}{1-a}$ on a :$\Omega(\omega)$ est un point invariant par f.

On pose $a = e^{\alpha i}$ où $\alpha \neq 2k\pi$ (car $a \neq 1$)

$z' - \omega = a(z - \omega)$ la transformation f est la rotation de centre $\Omega(\omega = \frac{b}{1-a})$ et d'angle α.

5me cas : $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

La transformation plane f qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$ est la composition de la rotation R et de l'homothétie h ; $f = hoR$ où :

1) R est la rotation d'angle $\alpha \equiv arg(a)$ $[2\pi]$ et de centre $\Omega(\omega)$ où $\omega = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| - \boldsymbol{a}}$

2) h est l'homothétie rapport $r = |a|$ et de Centre $O(0)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

Bon courage