1) Règles de calcul : $(a \in IR)$

Somme	Produit	Rapport
$+\infty + \infty = +\infty$ $-\infty - \infty = -\infty$	$(a>0)$; $a \times (+\infty) = +\infty$ $(a<0)$; $a \times (+\infty) = -\infty$	$\frac{1}{0^+} = +\infty$; $\frac{1}{+\infty} = 0^+$
$a + \infty = +\infty$ $a - \infty = -\infty$	$(a>0)$; $a \times (-\infty) = -\infty$ $(a<0)$; $a \times (-\infty) = +\infty$	$\frac{1}{0^-} = -\infty$; $\frac{1}{-\infty} = 0^-$
$+\infty - \infty$ et $-\infty + \infty$ **FI**	$(\pm\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$ et $0.(\pm\infty)$ **FI**	$\frac{0}{0} = \mathrm{FI}$ et $\frac{\infty}{\infty} = \mathrm{FI}$
Limites remarquables pour la fonction circulaire		
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

2) Méthodes de calcul des limites quand x tend vers un nombre x_0 : $(a \in IR)$

a) Cas des fonctions ; polynômes ou rationnelles ou irrationnelles :

Considèrons la fonction f telle que $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8}$

En général, on remplace la variable x par x_0 . Trois cas cas se présentent :

Premier cas : on trouve un nombre « habituel » L, alors dans ce cas la limite c'est ce nombre L. On écrit :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

- Calculons $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? : en remplaçons x par 1, on trouve $\frac{-4}{3}$, d'où : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\frac{4}{3}$.
- Calculons $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? : en remplaçons x par 0, on trouve $\frac{-6}{4}$, d'où : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{3}{2}$.
- Calculons $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$? : en remplaçons x par -3, on trouve $\frac{0}{45}$, d'où : $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 0$.

Deuxième cas : on trouve $\frac{0}{0}$, c'est une forme indéterminée.

- Calculons $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$? : en remplaçons x par 2, on trouve $\frac{0}{0}$.

Là on rappelle qu'un polynôme $P(x)$ est divisible par $x - a$ si et seulement si $P(a) = 0$. On en déduit que les deux polynômes $x^2 + x - 6$ et $x^2 - 6x + 8$ sont tous les deux divisibles par $x - 2$, d'où :

$f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4}$, en remplaçant une deuxième fois x par 2, on trouve $\frac{5}{-2}$, d'où : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\frac{5}{2}$.

Troisième cas : on trouve $\frac{a}{0}$ avec $a \neq 0$, d'après les régles de calcul la limite est $-\infty$ ou $+\infty$.

- Calculons $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$? : en remplaçons x par 4, on trouve $\frac{14}{0}$. On a

$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$		$+$	0	$-$	

D'où : $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{(x-2)(x-4)} = \frac{x^2 + x - 6}{x-2} \times \frac{1}{x-4}$.

D'après le tableau de signes de $x - 4$, on a : $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

D'autre part on a : $\lim_{x\to 4}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\frac{14}{2}=7$, d'où enfin : $\lim_{x\to 4^-} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to 4^+} f(x)=+\infty$.

b) Cas des fonctions ; circulaires :

En général, on remplace la variable x par x_0 . Dans le cas d'une forme indéterminée, on utilise les limites remarquables citées dans le tableau en haut.

3) Méthodes de calcul des limites quand x tend vers l'infini :

a) Théorème : $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_2x^2+a_1x+a_0$ avec $a_n\neq 0$ est une fonction polynôme.

On a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$

Démonstration : on a sécrit pour tout x non nul

$$f(x)=a_nx^n\left(1+a_{n-1}\frac{1}{x}+....+a_2\frac{1}{x^{n-2}}+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n}\right)$$

Or $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^{n-1}}=....=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$, d'après le tableau en haut , ce qui fait

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$

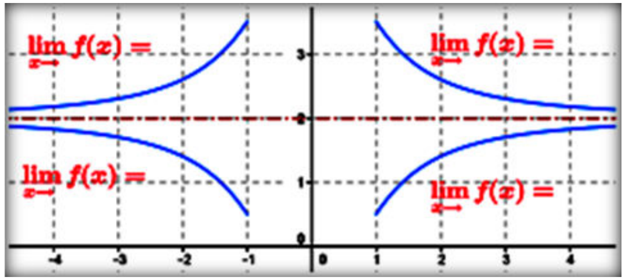
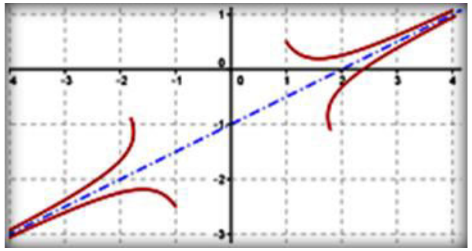
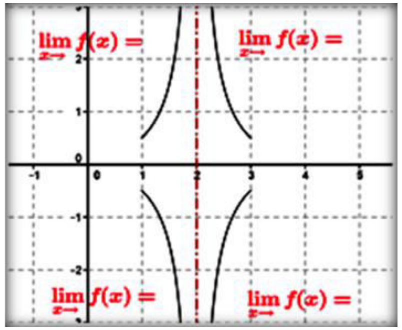
b) Théorème : Application aux fonctions polynômes

- $\lim_{x\to+\infty}(-5x^3+3x^2-4x-7)=\lim_{x\to+\infty}-5x^3=-\infty$
- $\lim_{x\to-\infty}(7x^5-4x^4-2x^2-3)=\lim_{x\to-\infty}7x^5=-\infty$

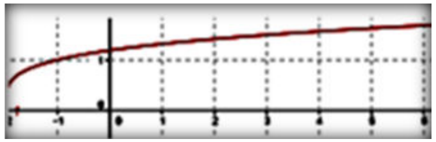
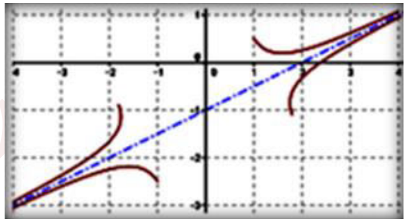
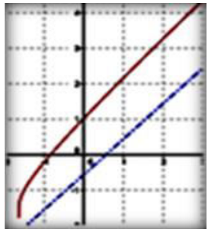
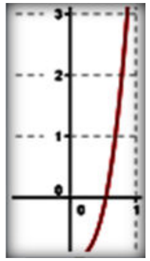
c) Théorème : Application aux fonctions rationnelles

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^7+3x^5-4x-7}{2x^3+5x^2-3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^7}{2x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{2}x^4=+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-3x-1}{3x^5+2x^3-8x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{3x^5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{3}\times\frac{1}{x^3}=\frac{5}{3}\times 0=0$
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^4-5x^4-3}{3x^4+2x^3-5x^2-11}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^4}{3x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$

Bonne Chance

Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$	Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$	Si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
 La droite (Δ) d'équation $y = b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞	La droite $(\Delta) : y = ax + b$ est une Asymptôte oblique à (C_f) signifie que : $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$  (C_f) est au dessus de $(\Delta) \Leftrightarrow \big(f(x) - (ax+b)\big) > 0$ (C_f) est en dessous de $(\Delta) \Leftrightarrow \big(f(x) - (ax+b)\big) < 0$	 La droite (Δ) d'équation $x = a$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de a

Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$	Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$		Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - ax\big) = b$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - ax\big) = \infty$	
 La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Ox)	 La droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞.	 La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D), d'équation $y = ax$	 La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy)