PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$ Etude analytique (1)

I) BASE ET REPERE ORTHONORMES

Soit $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base de V_2.

1) La base B est dite **orthogonale** si $\vec{i}.\vec{j}=0$

2) La base B est dite **normée si** $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$

3) Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.

4)Soit O un point du plan et Soit $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ un repère du plan $(\mathcal{P})$;On dit que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé si la base $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ associé à $\mathcal{R}$ est orthonormée.

II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2

on a : 1) $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ 2) $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$

3) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

4)Si $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$ alors

$$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

Théorème :L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ Soient $\vec{u}\left(x;y\right)$ et $\vec{v}\left(x';y'\right)$

$$\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}} \text{ et } \sin\theta=\frac{xy'-x'y}{\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)}{\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|}$$

IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

1) Vecteur normal sur une droite.

Soit $D\left(A;\vec{u}\right)$ la droite passante par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; tout vecteur $\vec{n}$ non nul et orthogonal à $\vec{u}$ s'appelle un vecteur normal sur la droite(***D***).

Remarque :Si $\vec{n}$ est normal sur une droite (D) ; Tout Vecteur non nul colinéaire avec $\vec{n}$ est aussi Normal sur la droite (D).

Si (D): $ax+by+c=0$ est une droite dans le plan alors $\vec{u}\left(-b;a\right)$), et le vecteur $\vec{n}\left(a;b\right)$ normal sur la droite (D).

2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Propriété : Soient $A\left(x_A;y_A\right)$ un point donné, et $\vec{n}\left(a;b\right)$ un vecteur non nul. La (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{n}$ comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :

(D): $a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$

Exemple : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0;1)$ et qui admet $\vec{n}(2;1)$ comme vecteur normal

Solution : on a (D) qui passe $A(0;1)$ et $\vec{n}(2;1)$ un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite (D) est : $2(x-0)+1(y-1)=0$

donc : (D) : $2x+y-1=0$

3) Distance d'un point par rapport à une droite.

Définition : Soient (D) une droite et M_0 un point dans le plan. La distance du point M_0 à la droite (D) est la distance M_0H où H est la projection orthogonal de M_0 sur (D).On la note : $d\left(M_0;(D)\right)$

Remarque : La distance d'un point M_0 à une droite (D) est la plus petite distance de M_0 à un point M de (D)

Théorème : Soient la droite (D): $ax+by+c=0$ et $M_0\left(x_0;y_0\right)$ un point dans le plan.

La distance du point M_0 à la droite (D) est :

$$M_0H=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

V) L'inégalité de Cauchy-Schwarz et triangulaire.

1)a)Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}.\vec{v}\le\left|\vec{u}.\vec{v}\right|\le\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|$

b) l'égalité est vérifiée si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2)a) Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$. L'inégalité triangulaire.

b) l'égalité est vérifié si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

Propriétés : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ Soient $\vec{u}\left(x;y\right)$ et $\vec{v}\left(x';y'\right)$ on a

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$\vec{u}.\vec{v}\le\left|\vec{u}.\vec{v}\right|\le\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\Leftrightarrow$

$xx'+yy'\le\left|xx'+yy'\right|\le\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}$

2) L'inégalité triangulaire.

: $\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|.\Leftrightarrow$

$\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}\le\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien