# BARYCENTRE

Le plan $(P)$ et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$

## 1) Barycentre de deux points pondérés.

**1-1)** Soit $A$ un point et $\alpha$ un réel non nul ; le couple $(A, \alpha)$ s'appelle un point pondéré.
Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

### 1-2) Barycentre de deux points pondérés.

a) Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré tel que $\alpha + \beta \neq 0$ ; le barycentre du système pondéré $\Sigma$ est le point $G$ qui vérifie : $\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

On écrit : $G = Bar\ \{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$

### 1-3) Propriétés de barycentre

**a)** Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

**b)** Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'appelle l'isobarycentre de A et B qui n'est que le milieu du segment $[AB]$.

**c)**Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que : $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.Pour tout point M du plan $(P)$ on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

ou $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre et on a : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

**d)**Si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors les points $A$, $B$ et $G$ sont alignés.

**e)**Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ des points du plan et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a : $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

et donc on a les coordonnées de $G$ : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{a+b} \end{cases}$

## 2) Barycentre de trois points pondérés

**2-1)** Soit $\Sigma$ :$\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Il existe un et un seul point $G$ qui vérifie $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ Et s'appelle le barycentre du système pondéré $\Sigma$

**2-2)** Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

si M est un point quelconque dans le plan $(P)$

on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$

donc : $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$

**2-3)** Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ des points du plan et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

on a : $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$

et donc les coordonnées de $G$ :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

**2-4) Propriétés :**

**a)**Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul : pour $k \neq 0$

$Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma) = Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$

**b)** La propriété d'associativité :
Si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$ avec $\alpha + \beta \neq 0$
et $G' = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
Alors : $G = Bar\ \{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

*Remarque :* La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

**c)Cas particulier :** Si les poids $\alpha$ ; $\beta$ et $\gamma$ sont égaux le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha)\}$
S'appelle **le centre de gravité** du triangle $ABC$.

### d) Barycentre de quatre points pondérés

Soit $\Sigma =\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ .Il existe un et un seul point $G$ qui vérifie : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Et si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

Et M est un point quelconque dans le plan $(P)$

Alors on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{s}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{s}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{s}\overrightarrow{MC}+\frac{\delta}{s}\overrightarrow{MD}$

**où** $s=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

**e)** Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ et $D(x_D;y_D)$ des points du plan

Et si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

Alors : les coordonnées de $G$ sont :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{s} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{s} \end{cases}$$

où $s=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

**f)** Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre

**g)** Si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$
Avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta \neq 0$ Si $G' = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
Et $G'' = Bar\ \{(C, \gamma); (D, \delta)\}$
Alors $G = Bar\ \{(G', (\alpha + \beta)); (G'', \gamma + \delta)\}$