

La fonction logarithme népérien :

La fonction logarithme népérien notée ln est l'unique fonction, définie et dérivable sur]0, +∞ [et vérifiant ln1=0

et pour tout réel x > 0, (ln x)' = 1/x > 0

Il est continu et strictement croissant sur]0, +∞ [.

Premières propriétés (directement liées à la définition)

Pour tous réels : ∀x > 0 ; ∀y > 0 ; ∀r ∈ ℚ

1) ln x = ln y ⇔ x = y 2) x ≤ y ⇔ ln x ≤ ln y

3) ln x > 0 ⇔ x > 1 4) ln x < 0 ⇔ 0 < x < 1

5) ln(x × y) = ln x + ln y 6) e ≈ 2,71828... et ln(e) = 1

7) ln(1/x) = -ln x 8) ln(x/y) = ln x - ln y

9) ln√a = 1/2 lna 10) ln(x^r) = r ln x

11) ln(e^x) = x ∀x ∈ ℝ 12) (e^ln x = x) (∀x > 0)

13) e^x = y ⇔ x = ln y ∀x ∈ ℝ et ∀y > 0

(Limites usuelles)

1) lim_{x→+∞} ln x = +∞ 2) lim_{x→0^+} ln x = -∞

3) lim_{x→+∞} ln x / x = 0

4) lim_{x→+∞} ln x / x^r = 0 (où r ∈ ℚ_*)

5) lim_{x→0^+} x^r ln x = 0 (où r ∈ ℚ_*)

6) lim_{x→1} ln x / (x-1) = 1

7) lim_{x→0} ln(x+1) / x = 1

Dérivée et primitives de la fonction x → ln(u(x))

1) Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors la fonction : f(x) = ln(|u(x)|) est dérivable sur I

et (∀x ∈ I) (f'(x) = u'(x) / u(x))

2) Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur

I alors les fonctions primitives de la fonction x → u'(x) / u(x) sont

les fonctions : F(x) = ln(|u(x)|) + Cte

FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE a

Soit (a > 0) et (a ≠ 1)

On note log_a la fonction logarithmique de base a

définie sur]0, +∞[par : (∀x ∈]0, +∞[) (log_a = ln x / ln a)

∀x > 0 ; ∀y > 0 ; ∀r ∈ ℚ

1) log_a(x × y) = log_a x + log_a y 2) log_a(1/x) = -log_a x

3) log_a(x/y) = log_a x - log_a y 4) log_a(√x) = (1/2)log_a x

5) log_a(x^r) = r log_a x

6) log_e = ln x / ln e = ln x

∀x ∈]0, +∞[; (log_a(x))' = 1 / (x ln a) donc La fonction log_a

est une bijection de]0, +∞[vers ℝ

1) (∀x > 0)(∀y > 0) (log_a(x) = log_a(y) ⇔ x = y)

2) (∀x > 0)(∀r ∈ ℚ) (log_a(x) = r ⇔ x = a^r)

3) log_a strictement croissante si (a > 1)

log_a strictement décroissante si (0 < a < 1)

Cas particulier a = 10 ; logarithme décimal :

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par log et (∀x ∈]0, +∞[)

(log x = ln x / ln 10) et on a : log(10) = 1

1) (∀x > 0)(∀r ∈ ℚ) (log(x) = r ⇔ x = 10^r)

2) (∀r ∈ ℚ) (log(10^r) = r) 3) log(x) > r ⇔ x > 10^r

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

