

PRODUIT SCALAIRE DANS \mathcal{V}_2 Etude analytique (2)

-Applications- : cercle

Dans tout ce qui va suivre le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé.

I) EQUATION D'UN CERCLE

Définition : Soient Ω un point et r un réel positif, le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M dans le plan (\mathcal{P}) qui vérifient : $|\Omega M| = r$ on le note, $\mathcal{C}(\Omega, r) : \mathcal{C}(\Omega; r) = \{M \in (\mathcal{P}) / |\Omega M| = r\}$

1) Cercle défini par son centre et son rayon.

Propriété : Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif, le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ a une équation cartésienne de la forme : $\mathcal{C}(\Omega, r) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

2) Equation réduite d'un cercle

Propriété1 : Tout cercle dans le plan à une équation de la forme : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des réels.

Propriété2 : Soit (C) L'ensemble des points

$M(x; y)$ du plan tel que : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

avec $a; b; c$ des réelles

• Si : $a^2 + b^2 - c > 0$

alors (C) est une cercle de centre

$\Omega(a; b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

• Si : $a^2 + b^2 - c = 0$ alors $(C) = \{\Omega(a; b)\}$

• Si : $a^2 + b^2 - c < 0$ alors $(C) = \emptyset$

3) Cercle définie par son diamètre.

Propriété : Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre $[AB]$ à pour équation :

$$(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$$

Et : $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

4) cercle définie par trois points ou Cercle circonscrit à un triangle

Soit ABC un triangle, les médiatrices du triangle ABC se coupent en Ω le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC

II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.

Définition : Soit $\mathcal{C}(\Omega; r)$ un cercle dans le plan.

a) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $|\Omega M| \leq r$ s'appelle la boule fermée de centre Ω et de rayon r , il s'appelle aussi l'intérieur du cercle $\mathcal{C}(\Omega; r)$

b) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $|\Omega M| > r$ s'appelle l'extérieur du cercle $\mathcal{C}(\Omega; r)$

Application : La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.

1) Propriété : Soit $\mathcal{C}(O; r)$ un cercle de rayon r strictement positif et (D) une droite dans le plan. Pour étudier les positions relatives du cercle $\mathcal{C}(O; r)$ de (D) , il suffit de déterminer la distance de O à (D) . soit H la projection orthogonal de O sur (D)

a) Si $d(O; (D)) = OH > r$

La droite (D) est strictement à l'extérieur du cercle (C)

$$(C) \cap (D) = \emptyset$$

b) $d(O; (D)) = OH = r$

Puisque $OH = r$ alors H est un point commun entre (D) et (C) .

$(C) \cap (D) = \{H\}$ On dit que la droite (D) est tangente au cercle (C) en H

c) $d(O, (D)) = OH < r$

Dans ce cas le cercle (C) et la droite (D) se coupent en deux points

M_1 et M_2 et H est le milieu du segment $[M_1 M_2]$

2) Droite tangente à un cercle.

2.1) Définition : Une droite (D) est dite tangente à un cercle (C) s'ils se coupent en un seul point.

2.2) Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.

Soit $\mathcal{C}(\Omega, r)$ un cercle dans le plan où $\Omega(a, b)$ et A l'un de ses points.

Soit la droite (T) la tangente à $\mathcal{C}(\Omega, r)$ en A

$$M(x; y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} = 0$$

Propriété : Soient $\Omega(a, b)$ un point et $\mathcal{C}(\Omega, r)$ un cercle dans le plan et A l'un de ses points. La droite (T) tangente à $\mathcal{C}(\Omega, r)$ en A à pour équation :

$$(x-x_A)(y-y_A) + (a-x_A)(b-y_A) = 0$$

.3) Equation paramétrique d'un cercle.

l'équation paramétrique du cercle (C) de centre

$$\Omega(a, b) \text{ et de rayon } r \text{ est : } \begin{cases} x = a + r \cos \alpha \\ y = b + r \sin \alpha \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

