

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

A) les Ensembles

1) vocabulaires

- Un ensemble E est une collection d'objets mathématiques. Les objets que l'ensemble contient sont appelés éléments
- Si x est un élément de E on dit que x appartient à E et on écrit : $x \in E$
- \emptyset est l'ensemble qui ne contient aucun élément, on peut le définir comme suite : $\{x \in E \text{ et } x \notin E\}$.
- Un ensemble peut être défini
 - En extension, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments entre accolades.
 - En compréhension c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments.

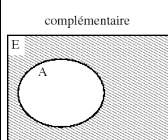
Exemples : L'ensemble des diviseurs de 3 en extension est : $D_3 = \{1; 3\}$

L'ensemble des diviseurs de 3 en compréhension est : $D_3 = \{n \in \mathbb{N} / n/3\}$

2) Egalité ; inclusion ; ensemble des parties d'un ensemble

- a) On dit que deux ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments ; on écrit $E = F$
 $(E = F) \Leftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$
- b) Soient E et F deux ensembles quelconques.
 E est dit inclus dans F si tout élément de E est un élément de F . On note $E \subset F$
 $(E \subset F) \Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F)$.
- c) Soit E un ensemble, les parties de E , constituent un ensemble qui s'appelle ensemble des parties de E et se note $P(E)$ et on a $P(E) = \{X / X \subset E\}$
- d) $A \subseteq E \Leftrightarrow A \in P(E)$ $\emptyset \in P(E)$ et $\emptyset \subset E$
 $E \in P(E)$ et $E \subset E$

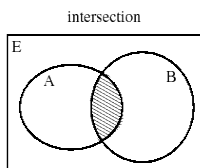
e) Soit $A \subseteq E$: le complémentaire de A on le note \bar{A} ou



C_E^A . $\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$
 Et on a : $\bar{\bar{E}} = \emptyset$ et $\bar{\emptyset} = E$
 $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} = I$ (Ensembles des irrationnelles).

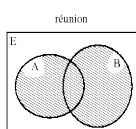
3) Intersection ; réunion, différence de deux Ensembles.

a) Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; l'intersection de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B . On le note par $A \cap B$.



$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$$

b) la réunion de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A ou à B . On le note par $A \cup B$.
 $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$



c) la différence de A et B est l'ensemble constitué par les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B . On le note par $A \setminus B$ ou $A - B$

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

4) Propriétés :

Soient E , un ensemble, A, B et C des parties de E .

- $(A = B) \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$
- $A \subset B \text{ et } B \subset C \Rightarrow (A \subset C)$ la transitivité
- $A \cap A = A$ et $A \cup A = A$

Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$

- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ L'associativité
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ L'associativité
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ la distributivité
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ la distributivité

$$\overline{\bar{A}} = A \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{lois de Morgan}$$

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\bar{B} \subset \bar{A})$$

$$A - B = A - (A \cap B) \quad A - B = A \cap \bar{B}$$

5) Notations généralisées.

a) Soient A_1, A_2, \dots, A_n une famille de parties d'un ensemble E , (qu'on peut noter $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$)

L'ensemble : $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ se note : $\bigcup_{i=1}^n A_i$

L'ensemble $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ se note : $\bigcap_{i=1}^n A_i$

b) Une famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de parties d'un ensemble E s'appelle une partition de l'ensemble E si elle vérifie

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = E \text{ et } i \neq j \Rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)$$



On dit que les ensembles sont disjoints deux à deux.

B) LES APPLICATIONS

1) Application Définition : Soient E et F deux ensembles non vides, on appelle application toute relation f de E dans F tel que : tout élément x de E est relié à un unique élément y de F . **Vocabulaire :** $f : E \rightarrow F$

$$x \mapsto y = f(x)$$

- a) L'ensemble E s'appelle ensemble de départ de l'application f .
- b) L'ensemble F s'appelle ensemble d'arrivée de l'application f .
- c) $y = f(x)$ s'appelle l'image de x par l'application f .
- d) x s'appelle l'antécédent de y par l'application f .

2) Egalité de deux applications

On dit que deux applications f et g sont égales si :

- 1) Elles ont le même ensemble de départ E
- 2) Elles ont le même ensemble d'arrivée F

$$3) (\forall x \in E)(f(x) = g(x)).$$

3) Définition : (injection) Soit f une application de E dans F , on dit que f est injective de E dans F si :

$$\forall (x_1; x_2) \in E^2 \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Par contraposition on peut dire que :

$$(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow \forall (x_1; x_2) \in E^2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

4) Définition : (surjection) Soit f une application de E dans F , on dit que f est surjective de E dans F si tout élément y de F admet un antécédent dans E .

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E)(f(x) = y)$$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans E .

5) a) Définition : (bijection)

Soit f une application de E dans F , on dit que f est une bijection de E dans F si elle est injective et surjective

b) Propriété : Une application est une bijection de E dans F si et seulement si :

$$(\forall y \in F)(\exists ! x \in E)(f(x) = y)$$

Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans E .

c) Définition (bijection réciproque) : Si f est une bijection de E dans F ; L'application de F dans E qui lie chaque élément y par l'élément x de E qui est solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle la bijection réciproque de la bijection f et se note f^{-1} . f bijection de E dans F ; f^{-1} sa bijection réciproque on a :

$$\begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x \in E \end{cases}$$

6) L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application

a) Définition : Soit f une application de E dans F , A une partie de E et B une partie de F .

L'image directe de l'ensemble A est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}$$

L'image réciproque de l'ensemble B est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

b) Propriété : Soit f une application de E dans F . f est surjective de E dans F , si et seulement si : $f(E) = F$.

7) Restriction ; Prolongement d'une application

Définition : Soit f une application de E dans F

Soit A une partie de E , l'application définie de A vers F , qui associe à tout élément x de A l'élément $f(x)$, s'appelle la restriction de f sur l'ensemble A .

Soit Γ un ensemble tel que $E \subset \Gamma$, l'application définie de Γ vers F , qui associe à tout élément x de E l'élément $f(x)$, s'appelle un prolongement de f sur l'ensemble Γ .

8) La partie entière d'un réel.

a) Théorème : On admet la proposition suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists ! k \in \mathbb{Z})(k \leq x < k + 1).$$

b) Définition : L'entier relatif k qui vérifie le théorème précédent s'appelle la partie entière du réel x

On le note $[x]$ ou $E(x)$.

L'application qui lie chaque élément x de \mathbb{R} par $E(x)$ dans \mathbb{Z} s'appelle l'application partie entière.

$$\text{Exemple : } E(\sqrt{2}) = 1 \quad E(\sqrt{2}) = 1 ; \quad E(\pi) = 3$$

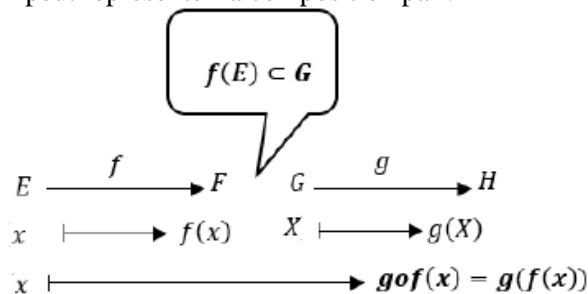
$$E(-\pi) = -4 \quad \text{et on a : } (\forall k \in \mathbb{Z})(E(k) = k)$$

9) Composition de deux applications.

a) Définition : Soient f une application de E dans F et g une application de F dans H tel que : $f(E) \subset G$, l'application h définie de E vers H par pour tout x dans E , $h(x) = g(f(x))$ s'appelle la composition des deux applications f et g et se note $g \circ f$.

$$(\forall x \in E)(g \circ f(x) = g(f(x)))$$

On peut représenter la composition par :



b) Propriété :

- 1) La composition de deux applications injectives est une application injective
- 2) La composition de deux applications surjectives est une application surjective
- 3) La composition de deux bijections f et g est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

4) La composition des applications est associative :

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

5) La composition des applications n'est pas commutative : $f \circ g \neq g \circ f$

c) autre Propriétés : Si f est une bijection de E dans F et f^{-1} sa bijection réciproque :

- $(\forall x \in E)(f^{-1} \circ f)(x) = x$ $f^{-1} \circ f$ s'appelle l'identité de E et se note Id_E

- $(\forall x \in F)(f \circ f^{-1})(x) = x$, $f \circ f^{-1}$ s'appelle l'identité de F et se note Id_F

- Si $E = F$ alors : $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_E$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

