Angles orientés et trigonométrie

Angles orientés mesurés en radian

- Le radian est une unité d'angle définie comme l'arc entre deux points du cercle unité de longueur 1.
- L'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est orienté de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$.

  On a les relations suivantes :

  $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$ relation de Chasles

  $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$ et $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$
- Soit θ_1 et θ_2 deux mesures d'un même angle $(\vec{u}, \vec{v})$:

  $\exists k \in \mathbb{R},\ \theta_2 = \theta_1 + k\,2\pi \iff \theta_2 = \theta_1\ [2\pi]$
- θ mesure principale d'un angle $(\vec{u}, \vec{v})$ si $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi]$

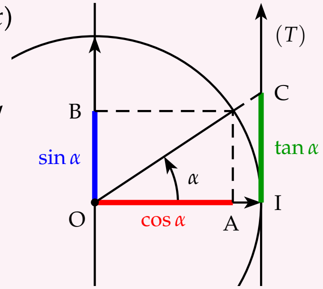
Lignes trigonométriques

Dans le cercle unité, α est l'angle orienté :

$\cos\alpha =$ projeté de α sur (Ox) $= \mathrm{OA}$

$\sin\alpha =$ projeté de α sur $(Oy$ $= \mathrm{OB}$

$\tan\alpha =$ projeté de α sur (T) $= \mathrm{IC}$



Relations fondamentales

- $-1 \leqslant \cos a \leqslant 1$, $-1 \leqslant \sin a \leqslant 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ \sin^2 a + \cos^2 a = 1$
- $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$, $\forall a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

  $1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Formules d'addition

Soient a et b deux angles quelconques :

- Avec cosinus on « *ne panache pas* » :

  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- Avec sinus on « *panache* » :

  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

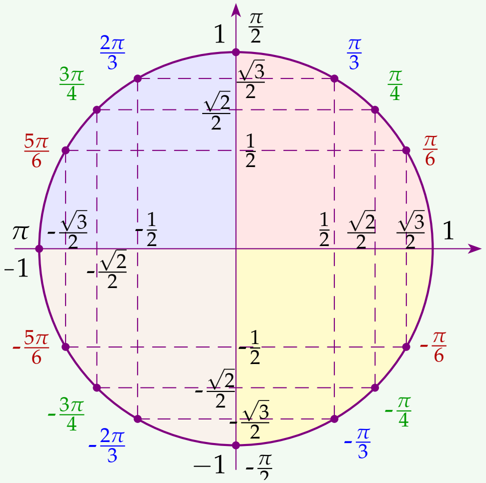


Tableau de signes de cosinus et sinus

$\cos\theta \leqslant 0$ $\sin\theta \geqslant 0$	$\cos\theta \geqslant 0$ $\sin\theta \geqslant 0$
$\cos\theta \leqslant 0$ $\sin\theta \leqslant 0$	$\cos\theta \geqslant 0$ $\sin\theta \leqslant 0$

Formules de duplication et de linéarisation

1) Formule de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

  $= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

2) Formules de linéarisation

- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Symétries et compléments

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$

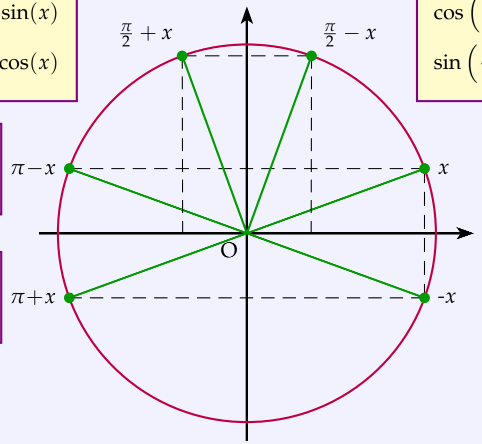
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$

$\cos(\pi-x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi-x) = \sin(x)$



$\cos(\pi+x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi+x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

Exemple d'application

Soit $A = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{23\pi}{14}$. Montrer que $A = 0$

$$\begin{aligned}
A &= \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos -\frac{5\pi}{14} \qquad \text{car } \frac{23\pi}{14} = -\frac{5\pi}{14} \quad [2\pi] \\
&= \cos\frac{\pi}{7} + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right) + \cos\frac{5\pi}{14} \\
&= \cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right) \\
&= -\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Applications des formules

- **Relations fondamentales :** Sachant que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer $\sin\frac{\pi}{5}$

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{5} = 1 - \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16} = \frac{10-2\sqrt{2}}{16} \quad \overset{\cos\frac{\pi}{5}>0}{\Longrightarrow}$$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

- **Formules d'addition :**

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

- **Formules de linéarisation :**

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \quad \overset{\cos\frac{\pi}{8}>0}{\Longrightarrow} \quad \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \quad \overset{\cos\frac{\pi}{8}>0}{\Longrightarrow} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Figure donnant les formules d'addition de cosinus et sinus

- On trace un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
- On repère le rayon [OA] par rapport à la droite (OI) par les angles x et y.
- Le point A se projette orthogonalement en H sur la droite (OI).
- Le point A se projette orthogonalement en B sur la droite formant un angle y avec (OI).
- Le point B se projette orthogonalement en C sur la droite (OI).
- Le point A se projette orthogonalement en D sur la droite (CB). On a alors : $\widehat{ABD} = y$.

Sachant que cosinus est la projection orthogonale sur l'axe horizontal et sinus sur l'axe vertical, on obtient la figure suivante :