

## LIMITES – EXERCICES CORRIGES

### Exercice n°1.

Déterminer la limite éventuelle en  $+\infty$  de chacune des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$       2)  $f(x) = -x^4$       3)  $f(x) = -3 + \frac{1}{x}$

Déterminer la limite éventuelle en  $-\infty$  de chacune des fonctions suivantes :

4)  $f(x) = -x^3$       5)  $f(x) = 5 + \frac{1}{x}$       6)  $f(x) = \sqrt{-x}$

Déterminez les limites suivantes

7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \frac{1}{x})$       8)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 4 + \frac{1}{x})$       9)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x - 3)$       10)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x - 4}$       11)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-2 + \frac{3}{x}}$

12)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(-x + 1)$       13)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} (-3t(t - 4))$       14)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \frac{1}{x} + 3 \right)$

Etudier le comportement de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  avec :

15)  $f(x) = \frac{1}{x - 2}, a = 2$       16)  $f(x) = \frac{-2}{x + 3}, a = -3$       17)  $f(x) = \frac{1}{x^2}, a = 0$

### Exercice n°2.

Déterminer les limites de  $f(x) = \frac{x}{(x + 1)(x - 2)}$  en  $x = 2$  et  $x = -1$ .

### Exercice n°3.

Déterminez les limites suivantes

1)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{x}}$  en  $+\infty$       2)  $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  en  $-\infty$

### Exercice n°4.

Vrai ou Faux ?

- 1) Si une fonction  $f$  est strictement croissante et positive sur  $[0; +\infty[$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 2) Si une fonction  $f$  a pour limite 0 en  $+\infty$ , alors, à condition de prendre  $x$  suffisamment grand, tous les nombres réels  $f(x)$  sont de même signe
- 3) Si une fonction  $f$  a pour limite -1 en  $+\infty$ , alors, à condition de prendre  $x$  suffisamment grand, tous les nombres réels  $f(x)$  sont de même signe

### Exercice n°5.

$f$  est une fonction numérique dont l'expression est  $f(x) = ax + \frac{2}{x - b}$ .

Déterminer  $a$  et  $b$  sachant que  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 11$

Exercice n°6. Déterminez les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2x + 10$       2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 + 5x - 2$       3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4}{x^2 + x + 1}$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x^3 + 1}{4x + 16}$       5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$       6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1}$       7)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

### Exercice n°7.

Trouver deux fonctions  $f$  et  $g$  telles que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  et telles que :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 1$       2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 7$

Exercice n°8.

Déterminez les limites suivantes : 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$                     2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x + 2)$

Exercice n°9.

- 1) Soit  $f$  une fonction telle que pour tout  $x > 1$ ,  $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
 2) Soit  $f$  une fonction telle que pour tout  $x > 1$ ,  $\frac{2}{x} \leq f(x) \leq \frac{3}{x}$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
 Les propriétés suivantes permettent-elles de conclure concernant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ?  
 3)  $f(x) \geq 2x - 3$     4)  $f(x) \geq x^2 - 3$

Exercice n°10.

On considère la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = x - \sqrt{x} + 4$

- 1) Montrer que pour tout  $x \in [0; +\infty[$   $f(x) \geq 3\sqrt{x}$   
 2) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice n°11.

Soit la fonction  $f$  définie sur  $D = [0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

- 1) Démontrer que, pour tout  $x$  de  $D$ , on a :  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$ .  
 2) Démontrer que, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :  $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$   
 3) En déduire la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

Exercice n°12.

On considère la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = 2x - \sin x$

- 1) Montrer que pour tout  $x$  réel  $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$   
 2) En déduire les limites de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$

Exercice n°13.

Déterminer, à l'aide des théorèmes de comparaison, les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de chacune des fonctions  $f$  suivantes (si elles existent):  
 1)  $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}$     2)  $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$  ;

Exercice n°14.

On veut trouver la limite en  $+\infty$  de  $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

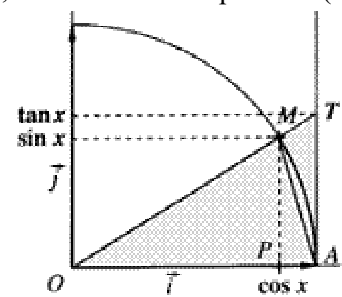
- 1) Montrer que pour  $x > 0$ ,  $x^2 < 1 + x^2 < (1 + x)^2$   
 2) En déduire pour  $x > 0$  un encadrement de  $f(x)$ .  
 3) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Exercice n°15.

Soit  $x$  un réel de  $]0; \frac{\pi}{2}[$ . Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on considère les points  $A(1;0)$ ,

$M(\cos x; \sin x)$ ,  $P(\cos x; 0)$  et  $T(1; \tan x)$ . Soit  $A_1$  l'aire du triangle  $OAM$ ,  $A_2$  l'aire du secteur de disque  $OAM$  et  $A_3$  l'aire du triangle  $OAT$ .

- 1) En comparant ces aires, prouver que :  $\sin x \leq x \leq \tan x$ .  
 2) En déduire que  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ .  
 3) Déterminer la limite de  $\frac{\sin x}{x}$  en 0 (étudier les cas  $x < 0$  et  $x > 0$ ).



Exercice n°16.

En utilisant le résultat  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (cf exercice précédent), étudiez les limites en 0 des fonctions :

- 1)  $x \rightarrow \frac{\sin 5x}{2x}$       2)  $x \rightarrow \frac{x}{\sin 3x}$       3)  $x \rightarrow \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$       4)  $x \rightarrow \frac{\tan x}{x}$

Exercice n°17.

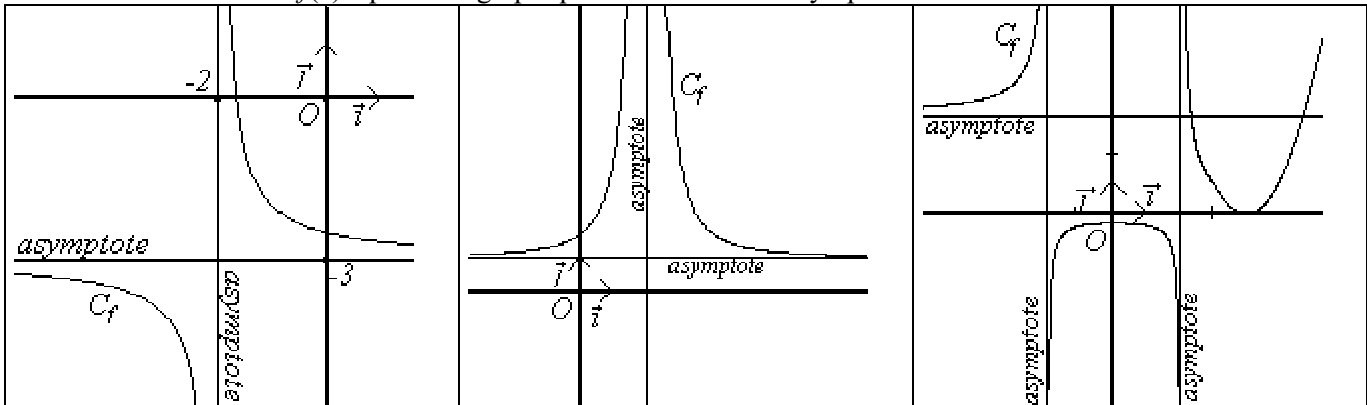
En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$        $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$        $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

Exercice n°18.

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$        $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$        $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos 2x - 1}{6x - \pi}$

Exercice n°19.

Retrouver les limites de  $f(x)$  à partir du graphique connaissant les asymptotes

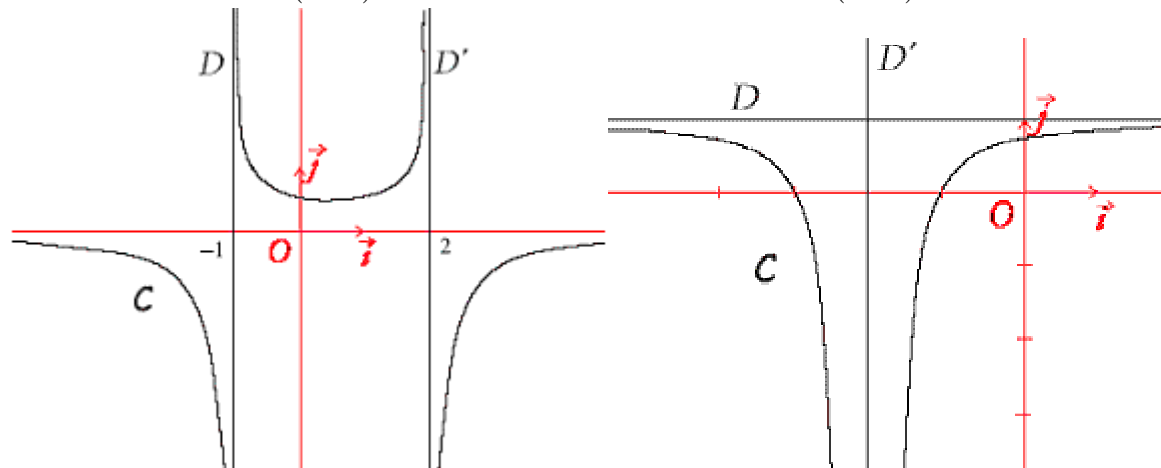


Exercice n°20.

Dans chacun des cas ci-dessous, on donne trois fonctions et la représentation graphique C de l'une d'entre elles. Retrouver celle qui est représentée, en justifiant (qu'est-ce qui permet d'éliminer les 2 autres ?)

**1<sup>er</sup> cas**       $f_1(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$  ou  $f_2(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$  ou  $f_3(x) = -\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

**2<sup>ème</sup> cas**       $g_1(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$  ou  $g_2(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2}$  ou  $g_3(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$



Exercice n°21.

Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes des fonctions suivantes :

- 1)  $f(x) = \frac{3x-1}{x}$       2)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$       3)  $f(x) = \frac{1}{x+2}$       4)  $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$       5)  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$

Exercice n°22.

Soit  $f$  la fonction  $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$ . Etudier le comportement de  $f$  en  $0$ ,  $+\infty$  et  $-\infty$ , en précisant les asymptotes à la courbe représentative de  $f$  et les positions relatives de la courbe et de chaque asymptote.

Exercice n°23.

Soit  $f$  la fonction  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}$

- Déterminez trois nombres réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$  pour  $x \neq -2$
- Etudier le comportement de  $f$  en  $+\infty$  (limite, asymptote sur la courbe).

Exercice n°24.

Montrer que la droite d'équation  $y = x$  est asymptote en  $+\infty$  à la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Exercice n°25.

Montrer que la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote pour  $x \rightarrow +\infty$  à la courbe représentative de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

Exercice n°26.

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 20}{x + 3}$

- Quel est l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ ?
- Déterminez trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout  $x$  de  $D$ , on ait :  $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x + 3}$
- Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x)$  ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax^2 + b))$
- Soit  $g$  la fonction numérique définie par :  $g(x) = x^2 - 4$ . Etudier le signe de  $f(x) - g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ . En déduire les positions relatives des courbes suivant les valeurs de  $x$ .

Exercice n°27.

Pour tout réel  $x$  non nul, on considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{(50 + x^{20})^2 - 2500}{x^{20}}$

A l'aide de la calculatrice, remplir le tableau suivant :

$x$	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01
Valeur approchée de $f(x)$							

- Peut-on conjecturer la limite de  $f$  en zéro ?
- En développant  $(50 + x^{20})^2$ , simplifier l'expression de  $f(x)$  pour  $x \neq 0$ . Calculer alors la limite de  $f$  en zéro. Surprenant, non ?

Exercice n°28.

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) \ln x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 4 + \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$  (Poser  $X = \frac{1}{x}$ )
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$  (Poser  $X = 2x$ )

Exercice n°29.

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + e^x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 4e^x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} - 3e^x \right)$

Exercice n°30.

Étudiez les limites de la fonction  $f$  donnée aux bornes de son ensemble de définition  $D$ , et trouver les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de  $f$ .

$$1) f(x) = e^{-x} - 4 \quad 2) f(x) = \frac{3}{1+e^x} \quad 3) f(x) = x - 2 + xe^x \quad 4) f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

Exercice n°31.

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ .

1) Déterminer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$

2) Montrer que  $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ , et calculer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$

3) En déduire l'existence de deux asymptotes de la courbe  $C$ .

# LIMITES – CORRECTION

## Exercice n°1

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  donc par quotient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ , c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$  donc par multiplication  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4 = -\infty$ , c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



ne pas confondre  $-x^4$  et  $(-x)^4 = x^4$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  donc par somme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 + \frac{1}{x} = -3$ , c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  donc par produit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$ , c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$  donc par somme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + \frac{1}{x} = 5$ , c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$

6)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$  donc par composition avec la fonction racine,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$ , c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$  donc par somme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - \frac{1}{x} = +\infty$

8)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 - 4 = 0 - 4 = -4$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$  donc par somme  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 4 + \frac{1}{x}) = +\infty$

9)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3 = -\infty$  donc par somme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x - 3) = -\infty$

10)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 4 = -\infty$  donc par quotient,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x - 4} = 0$

11)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \frac{3}{x} = -2$ . De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ . Par quotient,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-2 + \frac{3}{x}} = -\infty$

12)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 1 = -\infty$  donc par produit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(-x + 1) = -\infty$

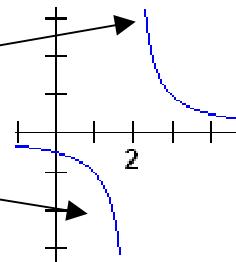
13)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} -3t = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} t - 4 = -\infty$  donc par produit  $\lim_{t \rightarrow -\infty} (-3t(t - 4)) = -\infty$

14)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3$  (car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ) donc par produit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty$

15)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x - 2 = 0^+$  (car  $x > 2 \Leftrightarrow x - 2 > 0$ ) donc par quotient,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x - 2} = +\infty$ . De la même manière  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x - 2 = 0^-$  (car

$x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$ ) donc par quotient,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x - 2} = -\infty$ .

Les limites « à gauche » et « à droite » de 2 diffèrent.



16)  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} x + 3 = 0^+$  (car  $x > -3 \Leftrightarrow x + 3 > 0$ ) donc par quotient (attention à la règle des signes !),  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{-2}{x + 3} = -\infty$ .

De la même manière  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} x + 3 = 0^-$  (car  $x < -3 \Leftrightarrow x + 3 < 0$ ) donc par quotient,  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} \frac{-2}{x + 3} = +\infty$ .

17) Puisque pour tout réel  $x$  on a  $x^2 \geq 0$ , on a donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^+$  ainsi que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 = 0^+$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$  ainsi que

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ . Les limites à gauche et à droite de 0 sont ici identiques.

Exercice n°2

Il est clair que  $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)(x-2) = 0$  ainsi que  $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)(x-2) = 0$ , mais encore faut-il connaître le signe de l'expression

$$D(x) = (x+1)(x-2).$$

Un tableau de signes nous fournit :

$$D(x) < 0 \text{ si } x \in ]-1; 2[$$

$$D(x) > 0 \text{ si } x \in ]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$x+1$	$-$	$0$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$0$	$-$	$+$
$(x+1)(x-2)$	$+$	$0$	$-$	$+$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x+1)(x-2) = 0^+ . \text{ Comme } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} x = -1, \text{ on conclut, par quotient, que } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x+1)(x-2) = 0^-, \text{ donc par quotient, } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = +\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x+1)(x-2) = 0^-. \text{ Comme } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x = 2, \text{ on conclut, par quotient, que } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x+1)(x-2) = 0^+, \text{ donc par quotient, } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = +\infty$$

Exercice n°3

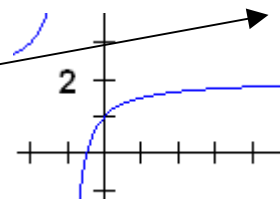
1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ . En notant  $u = \frac{2x^2 - 1}{x}$  on a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = +\infty$  et puisque  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \sqrt{u} = +\infty$ , en

composant, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{x}} = +\infty$

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ . En notant  $u = \frac{1}{x}$  on a donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u = 0$  et puisque  $\lim_{u \rightarrow 0} \cos(u) = 1$ , en composant, on obtient  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

Exercice n°4

1) FAUX. Par exemple, la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$  est strictement croissant sur  $]0; +\infty[$ , positive, et pourtant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

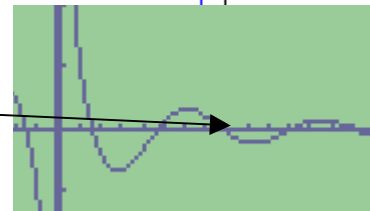


2) FAUX. Par exemple, la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$  vérifie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ (par encadrement, voir exercice n°), et pourtant sa courbe } C_f$$

« oscille » autour de 0.

Cela signifie que les nombres réels  $f(x)$  ne sont pas tous de même signe



3) VRAI. Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ , cela signifie que tout intervalle centré en  $-1$  contiendra toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  suffisamment grand. Ainsi, pour  $x$  suffisamment grand, on aura, par exemple  $-1,5 \leq f(x) \leq -0,5$  donc les nombres  $f(x)$  seront tous de même signe

Exercice n°5

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3a + \frac{2}{3-b}$ , pour avoir  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ , il est nécessaire d'avoir  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x-b} = +\infty$ , c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} x - b = 0^+, \text{ donc } b = 3. \text{ Ainsi, pour tout } x \neq 3, f(x) = ax + \frac{2}{x-3} \text{ et l'information } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 11 \text{ fournit l'indication}$$

$$f(5) = 11 \Leftrightarrow 5a + \frac{2}{5-3} = 11 \Leftrightarrow 5a = 10 \Leftrightarrow a = 2$$

Exercice n°6

1) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x + 10 = -\infty$ , on est en présence d'une forme indéterminée «  $\infty - \infty$  »

Il existe (au moins) deux manières de rédiger :

1<sup>ère</sup> manière :

Puisque  $x \rightarrow +\infty$ , on peut supposer  $x \neq 0$

Alors  $3x^2 - 2x + 10 = x^2 \left( 3 - \frac{2x}{x^2} + \frac{10}{x^2} \right) = x^2 \left( 3 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2} \right)$  (factorisation par le terme de plus haut degré puis simplification).

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{x^2} = 0$ , on a, par somme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2} \right) = 3$ , et puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ , on conclut, par

produit, que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 3 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2} \right) = +\infty$ , c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2x + 10 = +\infty$

Remarque : Plutôt que de mettre  $x^2$  en facteur dans l'expression  $3x^2 - 2x + 10$ , on aurait pu mettre  $3x^2$  en facteur, de sorte que  $3x^2 - 2x + 10 = 3x^2 \left( 1 - \frac{2x}{3x^2} + \frac{10}{3x^2} \right) = 3x^2 \left( 1 - \frac{2}{3x} + \frac{10}{3x^2} \right)$ . On raisonne de la même manière, à savoir  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x} = 0$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{3x^2} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{3x} + \frac{10}{3x^2} \right) = 1$ , et puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$ , on conclut, par produit, que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 \left( 1 - \frac{2}{3x} + \frac{10}{3x^2} \right) = +\infty$ , c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2x + 10 = +\infty$

2<sup>ème</sup> manière :

On utilise un résultat du cours stipulant que « la limite en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  d'un polynôme est la même que celle de son terme de plus haut degré ».

On écrit donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2x + 10 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$

2) Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x - 2 = -\infty$ , on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée «  $\infty - \infty$  ».

Le résultat du cours nous indique que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 + 5x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 = +\infty$

3) On examine les numérateurs et dénominateurs. On trouve  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 4 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$ . On se trouve dans

le cas d'une forme indéterminée «  $\frac{\infty}{\infty}$  ».

Il existe (au moins) deux manières de rédiger :

1<sup>ère</sup> manière :

Factorisation des deux membres par leur terme de plus haut degré :

Puisque  $x \rightarrow +\infty$ , on peut supposer  $x \neq 0$

Alors  $\frac{3x^2 + 4}{x^2 + x + 1} = \frac{x^2 \left( 3 + \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left( 1 + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{x^{\cancel{2}} \left( 3 + \frac{4}{x^2} \right)}{x^{\cancel{2}} \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{3 + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{4}{x^2} = 3$  (par somme), et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$  (par somme), on déduit, par quotient, que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3$  c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4}{x^2 + x + 1} = 3$

2<sup>ème</sup> manière :

On utilise un résultat du cours stipulant que « la limite en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  d'une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) est la même que celle du quotient simplifié de leurs termes de plus haut degrés respectifs »

On écrit donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}}} = 3$



4) Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -8x^3 + 1 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x + 16 = -\infty$ , on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée «  $\frac{\infty}{\infty}$  ».

Le résultat du cours nous indique que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x^3 + 1}{4x + 16} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x^2 \cdot x^3 + 1}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty$

5) Puisque  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - x - 2 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0$ , on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée «  $\frac{0}{0}$  ».

Il va falloir transformer l'écriture de  $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$  pour «résorber» la forme indéterminée.

Pour tout  $x \neq 2$ , grâce au calcul de  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$  on détermine les racines du trinôme :  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1$  et

$x_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2$ . La forme factorisée du trinôme nous permet de simplifier la fraction :

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$  donc  $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = x + 1$  On conclut que  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 1 = 3$

6) Puisque  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2x - 3 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - x - 1 = 0$ , on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée «  $\frac{0}{0}$  ».

Grâce aux calculs des discriminants, on peut factoriser numérateur et dénominateur :

Pour tout  $x \neq 1$ ,  $\frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{x + 3}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}$  donc  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{2\left(2 + \frac{1}{2}\right)} = 1$

7) Puisque  $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} - 3 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 9} x - 9 = 0$ , on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée «  $\frac{0}{0}$  ».

Il va falloir transformer l'écriture de  $\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$  pour «résorber» la forme indéterminée.

Pour tout  $x \neq 9$ ,  $\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x})^2 - 3^2} = \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}$ .

### Exercice n°7

1) On peut par exemple prendre  $f(x) = x + 1$  et  $g(x) = x$

2) On peut par exemple prendre  $f(x) = 7x$  et  $g(x) = x$

### Exercice n°8

1) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 3} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$ , on est en présence d'une forme indéterminée «  $\infty - \infty$  »

Pour résorber cette forme indéterminée, on utilise la technique de multiplication par la quantité conjuguée :

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,

$$\sqrt{x + 3} - \sqrt{x} = \sqrt{x + 3} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x + 3} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + 3} + \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x + 3} - \sqrt{x})(\sqrt{x + 3} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + 3} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x + 3})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x + 3} + \sqrt{x}} = \frac{x + 3 - x}{\sqrt{x + 3} + \sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x + 3} + \sqrt{x}}$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 3} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , on déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 3} + \sqrt{x} = +\infty$ , et par quotient,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x + 3} + \sqrt{x}} = 0$ ,

c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 3} - \sqrt{x} = 0$

2) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} = +\infty$  (car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 4x + 3 = +\infty$ ) et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -(x + 2) = -\infty$ , on est en présence d'une forme indéterminée «  $\infty - \infty$  ». Pour résorber cette forme indéterminée, on utilise la technique de multiplication par la quantité conjuguée : Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x + 2) &= \left( \sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x + 2) \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x + 2)} \\ &= \frac{\left( \sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x + 2) \right) \left( \sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x + 2) \right)}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x + 2)} \\ &= \frac{\left( \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right)^2 - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x + 2)} = \frac{x^2 + 4x + 3 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x + 2)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x + 2)} \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty$ , on déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} + x + 2 = +\infty$ , et par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x + 2)} = 0, \text{ c'est à dire } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x + 2) = 0$$

#### Exercice n°9

1) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ , d'après le théorème d'encadrement « des gendarmes », on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ , d'après le théorème d'encadrement « des gendarmes », on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$$

3) Si  $f(x) \geq 2x - 3$ , puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 = +\infty$ , on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . On ne peut rien conclure de plus.

4) Si  $f(x) \geq x^2 - 3$ , puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3 = +\infty$ , on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . On peut également utiliser ce théorème lorsque  $x \rightarrow -\infty$ . En effet puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3 = +\infty$ , on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ . On ne peut rien conclure de plus.

#### Exercice n°10

1) Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on calcule  $f(x) - 3\sqrt{x} = x - \sqrt{x} + 4 - 3\sqrt{x} = x - 4\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x} - 2)^2$ .

Un carré étant toujours positif ou nul, on en déduit que pour tout  $x \in [0; +\infty[$   $f(x) - 3\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 3\sqrt{x}$

2) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3\sqrt{x} = +\infty$ , on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

#### Exercice n°11

1) Par multiplication par la quantité conjuguée, pour tout  $x \in D$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \left( \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \right) \cdot \frac{\left( \sqrt{x+2} + \sqrt{x} \right)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\left( \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \right) \cdot \left( \sqrt{x+2} + \sqrt{x} \right)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \frac{\left( \sqrt{x+2} \right)^2 - \left( \sqrt{x} \right)^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

2) Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on a clairement  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \geq 0$  car  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq 0$ . De plus,

$$\sqrt{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

3) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ , en application du théorème d'encadrement « des gendarmes », on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

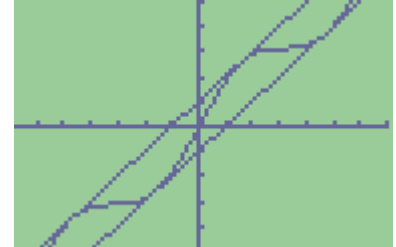
Exercice n°12

1) Pour tout  $x$  réel  $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq x + \sin x \leq x+1 \Leftrightarrow x-1 \leq f(x) \leq x+1$

2) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$ , on conclut, en utilisant le théorème de minoration,

que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty$ , on conclut, en utilisant

le théorème de minoration, que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .



Exercice n°13

1) Puisque pour tout réel  $x$ , on a  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , alors pour tout  $x > 0$ , on a  $1-1 \leq 1 + \cos x \leq 1+1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \cos x \leq 2$ , et par division par  $\sqrt{x}$  qui est  $> 0$ , on déduit que  $\frac{0}{\sqrt{x}} \leq \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ , en application du théorème d'encadrement « des gendarmes », on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2) Commençons par la limite lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . On peut donc supposer que  $x > 0$ .

Puisque pour tout réel  $x$ , on a  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , alors pour tout  $x > 0$ , on a  $\frac{-x}{x^2 + 1} \leq \frac{x \sin x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1}$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$ , et puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », on conclut que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

La limite lorsque  $x \rightarrow -\infty$  se traite à l'identique : on peut donc supposer que  $x < 0$ .

Puisque pour tout réel  $x$ , on a  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , alors pour tout  $x < 0$ , on a  $\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x \sin x}{x^2 + 1} \leq \frac{-x}{x^2 + 1}$  (l'inégalité est en sens inverse de la précédente)

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$ , et puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », on conclut que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Exercice n°14

1) Pour  $x > 0$   $0 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 + x^2$ . De plus  $(1+x)^2 = 1 + x^2 + 2x > 1 + x^2$  car  $x > 0$ . L'encadrement est ainsi démontré.

2) La fonction racine étant strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ , on déduit de l'encadrement  $x^2 < 1 + x^2 < (1+x)^2$  que  $\sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2} < \sqrt{(1+x)^2} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{1+x^2} < |1+x|$

Ne pas oublier que  $\sqrt{x^2} = |x|$

Puisque  $x > 0$  et  $1+x > 0$ , on a donc  $x < \sqrt{1+x^2} < 1+x$ , et enfin par division par  $x$ ,  $\frac{x}{x} < \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} < \frac{1+x}{x} \Leftrightarrow 1 < f(x) < 1 + \frac{1}{x}$

3) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ , en application du théorème « des gendarmes », on conclut que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Exercice n°15

1) On a clairement  $A_1 < A_2 < A_3$

On calcule :  $A_1 = \frac{OA \cdot PM}{2} = \frac{1 \cdot \sin x}{2}$ , puis par proportionnalité de l'aire et de la mesure du secteur angulaire,  $A_2 = \frac{x}{2}$  (car un angle de  $2\pi$  rad correspond à une aire de  $\pi r^2 = \pi cm^2$ , donc un angle de  $x$  rad correspond à une aire de  $x \cdot \frac{\pi}{2\pi} = \frac{x}{2}$ ). Enfin  $A_3 = \frac{OA \cdot AT}{2} = \frac{1 \cdot \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$

Puisque  $A_1 < A_2 < A_3$  alors  $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$ .

En multipliant les trois membres de l'inégalité par 2, on obtient le résultat attendu.

2) En utilisant les deux premiers termes de l'inégalité, on a  $\sin x < x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$  (car  $x > 0$ )

En utilisant les deux derniers termes de l'inégalité, on a  $x < \tan x \Leftrightarrow x < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$  (car  $x > 0$ )

3) Puisque pour tout  $x > 0$ ,  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ , et puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , on en conclut en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

4) si  $x < 0$ , la configuration des triangles et des secteurs angulaires reste la même, mais les mesures de l'aire (qui doivent être positives !) sont alors égales à  $A_1 = -\frac{\sin x}{2}$ ,  $A_2 = -\frac{x}{2}$  et  $A_3 = -\frac{\tan x}{2}$

On a donc, pour  $x < 0$ ,  $-\frac{\sin x}{2} < -\frac{x}{2} < -\frac{\tan x}{2} \Leftrightarrow -\sin x < -x < -\tan x$ .

En utilisant les deux premiers termes de l'inégalité, on a  $-\sin x < -x \Leftrightarrow \frac{-\sin x}{-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$  (car  $-x > 0$ )

En utilisant les deux derniers termes de l'inégalité :

on a  $-x < -\tan x \Leftrightarrow -x < \frac{-\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{-\sin x}{-x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$  (car  $-x > 0$ ).

La conclusion de l'exercice reste la même

Exercice n°16

1) On écrit, pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{\sin 5x}{\cancel{5x}} \cdot \frac{\cancel{5x}}{2x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x}$ . En posant  $u = 5x$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 0} u = 0$ , et puisque  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ ,

on en déduit donc que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$ , donc par produit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}$

2) On écrit, pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{\sin 3x}$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , on a aussi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ , donc en particulier

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} = 1$  (quitte à poser  $u = 3x$ ), d'où, par produit,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3}$

3) On écrit, pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x}$ . Encore une fois, puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$  et

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = 1$ , on conclut, par produit, que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \frac{5}{4}$

4) On écrit, pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  et puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  donc

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ , on conclut que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$

Exercice n°17

1) Si on pose  $f(x) = \sqrt{x+6}$ , définie sur  $]-6; +\infty[$ , puisque  $f(3) = \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$ , la limite  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3}$  se réécrit  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3}$ . Or  $f$  est dérivable sur  $]-6; +\infty[$  et pour tout  $x \in ]-6; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+6}} = \frac{1}{6}. \text{ Ainsi } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3} = \frac{1}{6}$$

2) Si on pose  $f(x) = \sin x$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , puisque  $f(0) = \sin 0 = 0$ , la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  se réécrit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0}$ . Or  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \cos x$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = f'(0) = \cos 0 = 1$ .

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

3) Si on pose  $f(x) = \cos x$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , puisque  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , la limite  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$  se réécrit

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$ . Or  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -\sin x$  donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1. \text{ Ainsi } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1.$$

Exercice n°18

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$  - Si on pose  $f(x) = \tan x$ , alors  $f(0) = 0$ , et ainsi  $\frac{\tan x}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x-0}$ .

Puisque  $f$  est dérivable en 0,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = f'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$  - Si on pose  $f(x) = \sqrt{x}$ , alors  $f(1) = 1$ , et ainsi  $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

Puisque  $f$  est dérivable en 1,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos 2x - 1}{6x - \pi}$  - On commence à écrire  $\frac{2 \cos 2x - 1}{6x - \pi} = \frac{2}{6} \cdot \frac{\cos 2x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$ . Pour étudier  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$ , on pose

$$f(x) = \cos 2x.$$

$$\text{Ainsi } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \text{ et ainsi } \frac{\cos 2x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} = \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}.$$

Puisque  $f$  est dérivable en  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$ ,

$$\text{et ainsi } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos 2x - 1}{6x - \pi} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

Exercice n°19

1) Sur le premier graphique, on « lit » que la droite d'équation  $y = -3$  est asymptote horizontale à  $C_f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Cela signifie que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ . De plus, la droite d'équation  $x = -2$  est asymptote verticale à  $C_f$ , et les limites différent à droite et à gauche de  $-2$ . Cela signifie que  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$

2) Sur le deuxième graphique, on « lit » que la droite d'équation  $y = 1$  est asymptote horizontale à  $C_f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Cela signifie que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ . De plus, la droite d'équation  $x = 2$  est asymptote verticale à  $C_f$ , et les limites à droite et à gauche de  $2$  sont identiques. Cela signifie que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$

3) Sur le troisième graphique, on « lit » que la droite d'équation  $y = 3$  est asymptote horizontale à  $C_f$  uniquement en  $-\infty$ . Cela signifie que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ . De plus, la courbe  $C_f$  possède deux asymptotes verticales : les droites d'équation  $x = 2$  et  $x = -2$ . Les limites à droite et à gauche de ces valeurs sont différentes. Cela signifie que  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$  et

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$  ainsi que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$ .

Exercice n°20

1) La première courbe correspond à  $f_3(x) = -\frac{1}{(x+1)(x-2)}$  car elle présente deux asymptotes verticales synonymes de valeurs interdites égales à  $-1$  et  $2$ , ce qui ne correspond pas à  $f_1(x)$ . De plus, la courbe se situant en dessous de l'axe des abscisses en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , on devrait avoir une fonction « négative » dans ces deux voisinages, ce qui n'est pas le cas de  $f_2(x)$

2) La limite en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction étant égale à  $1$ , on peut éliminer directement  $g_1(x)$  et  $g_3(x)$ , pour ne garder que  $g_2(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2}$

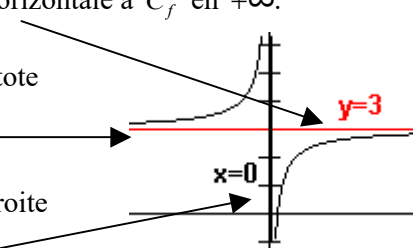
Exercice n°21

1) Pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \frac{3x-1}{x} = 3 - \frac{1}{x}$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{1}{x} = 3$  donc la droite d'équation  $y = 3$  est asymptote horizontale à  $C_f$  en  $+\infty$ .

De même,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - \frac{1}{x} = 3$  donc la droite d'équation  $y = 3$  est asymptote horizontale à  $C_f$  en  $-\infty$ .

De plus,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3 - \frac{1}{x} = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 3 - \frac{1}{x} = +\infty$  donc la droite d'équation  $x = 0$  (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à  $C_f$ .



2) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$  donc la droite d'équation  $y = 0$  (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à  $C_f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . De plus  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{x^2} = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{1}{x^2} = -\infty$  donc la droite d'équation  $x = 0$  (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à  $C_f$ .

3) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$  donc la droite d'équation  $y = 0$  (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à  $C_f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . De plus  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{1}{x+2} = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{1}{x+2} = +\infty$  donc la droite d'équation  $x = -2$  est asymptote verticale à  $C_f$ .

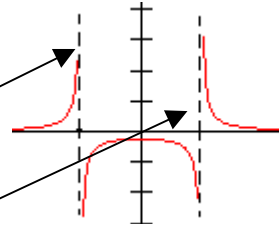
4) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0$  donc la droite d'équation  $y = 0$  (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale

à  $C_f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . De plus  $\lim_{x \rightarrow -2}^+ \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -2}^- \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty$

donc la droite d'équation  $x = -2$  est asymptote verticale à  $C_f$ .

Enfin  $\lim_{x \rightarrow 2}^- \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2}^+ \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty$

donc la droite d'équation  $x = 2$  est asymptote verticale à  $C_f$ .



5) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$  et de même  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = 0$  donc la droite d'équation  $y = 0$  (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à  $C_f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Les racines du dénominateur sont 1 et 2. On a donc

$\lim_{x \rightarrow 1}^- \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1}^+ \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = -\infty$  donc la droite d'équation  $x = 1$  est asymptote verticale à  $C_f$ . Enfin

$\lim_{x \rightarrow 2}^- \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2}^+ \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = +\infty$  donc la droite d'équation  $x = 2$  est asymptote verticale à  $C_f$ .

Exercice n°22

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ , on conclut, par somme, que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ . La droite d'équation  $x = 0$  (l'axe

des ordonnées) est asymptote verticale à  $C_f$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Puisque

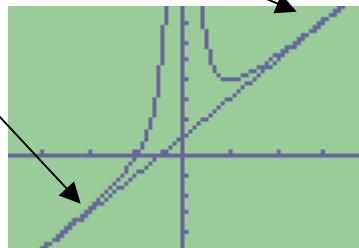
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

De plus, pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(x) - (2x + 1) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2} - (2x + 1) = \frac{1}{x^2}$ . Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ .

De la même manière  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ . On en conclut que la droite  $D$  d'équation  $y = 2x + 1$  est asymptote oblique à  $C_f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

Pour connaître la position relative de  $D$  et  $C_f$ , on étudie le signe de  $f(x) - (2x + 1) = \frac{1}{x^2}$ . Pour tout  $x \neq 0$ ,

$f(x) - (2x + 1) = \frac{1}{x^2} > 0$ , donc pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(x) > 2x + 1$ . Ceci signifie que sur tout son ensemble de définition,  $C_f$  est au dessus de  $D$ .



Exercice n°23

1)  $f$  est définie si et seulement si  $x + 2 \neq 0$  donc  $D = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[$ . Pour tout  $x \in D$ ,

$$ax + b + \frac{c}{x + 2} = \frac{(ax + b)(x + 2)}{x + 2} + \frac{c}{x + 2} = \frac{ax^2 + 2ax + bx + 2b + c}{x + 2} = \frac{ax^2 + (2a + b)x + 2b + c}{x + 2}$$

Donc  $ax + b + \frac{c}{x + 2} = f(x)$  si et seulement si  $\frac{ax^2 + (2a + b)x + 2b + c}{x + 2} = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}$  donc si et seulement si

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 3 \\ 2b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \text{ Ainsi, pour tout } x \in D, f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x + 2}$$

2) A partir de l'écriture  $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+2}$ , on déduit que  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$ , et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$ .

Mais surtout, puisque, pour tout  $x \neq -2$ ,  $f(x) - (2x - 1) = 2x - 1 + \frac{1}{x+2} - (2x - 1) = \frac{1}{x+2}$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ , donc la droite  $D$  d'équation  $y = 2x - 1$  est asymptote oblique à  $C_f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . De plus, pour tout  $x > -2$ ,  $f(x) - (2x - 1) = \frac{1}{x+2} > 0$ , donc  $C_f$  est au dessus de  $D$  sur  $] -2; +\infty[$ , et pour tout  $x < -2$ ,  $f(x) - (2x - 1) = \frac{1}{x+2} < 0$ , donc  $C_f$  est en dessous de  $D$  sur  $] -\infty; -2[$ .

Exercice n°24

On calcule, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) - x = \frac{x^3}{x^2+1} - x = \frac{x^3}{x^2+1} - x \cdot \frac{x^2+1}{x^2+1} = \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = \frac{-x}{x^2+1}$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0$  donc la droite  $D$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à  $C_f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Puisque, pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{-x}{x^2+1} < 0$ , et pour tout  $x < 0$ ,  $\frac{-x}{x^2+1} > 0$ , on en conclut que  $C_f$  est au dessus de  $D$  sur  $] -\infty; 0[$  et en dessous de  $D$  sur  $] 0; +\infty[$ .

Exercice n°25 On calcule, pour tout réel  $x > 1$ ,

$$f(x) - 2x = x + \sqrt{x^2 - 1} - 2x = \sqrt{x^2 - 1} - x = (\sqrt{x^2 - 1} - x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} = \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$$

Et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$ , on conclut que la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $C_f$  en  $+\infty$ .

Exercice n°26

1)  $f$  est définie si et seulement si  $x + 3 \neq 0$  donc  $D = ] -\infty; -3[ \cup ] -3; +\infty[$ .

2) Pour tout  $x \in D$ ,  $ax^2 + b + \frac{c}{x+3} = \frac{(ax^2 + b)(x+3)}{x+3} + \frac{c}{x+3} = \frac{ax^3 + 3ax^2 + bx + 3b + c}{x+3}$

Donc  $ax^2 + b + \frac{c}{x+3} = f(x)$  si et seulement si  $\frac{ax^3 + 3ax^2 + bx + 3b + c}{x+3} = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 20}{x+3}$  donc si et seulement si

$$\begin{cases} a = 1 \\ 3a = 3 \\ b = -4 \\ 3b + c = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -8 \end{cases} \text{ . Ainsi, pour tout } x \in D, f(x) = x^2 - 4 - \frac{8}{x+3}$$

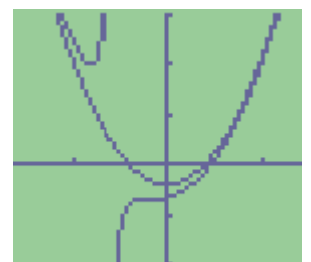
3) A partir de l'écriture  $f(x) = x^2 - 4 - \frac{8}{x+3}$ , on déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x) = -\infty$  (par

soustraction car  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{8}{x+3} = +\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) = +\infty$

4) Pour tout  $x \in D$ ,  $f(x) - (x^2 - 4) = x^2 - 4 - \frac{8}{x+3} - (x^2 - 4) = -\frac{8}{x+3}$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{8}{x+3} = 0$ , on déduit l'existence d'une **PARABOLE ASYMPTOTE** à  $C_f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

De plus, si  $x > -3$ ,  $-\frac{8}{x+3} < 0$ , et pour tout  $x < -3$ ,  $-\frac{8}{x+3} > 0$ ,

on en conclut que  $C_f$  est au dessus de  $C_g$  sur  $] -\infty; -3[$  et en dessous de  $C_g$  sur  $] -3; +\infty[$ .





Exercice n°27

La calculatrice fournit, grâce au menu TABLE :

X	Y1
.6	1.3E-7
.5	9E-11
.4	1E-14
.3	1E-19
.2	0
.1	0
0	0

X = .01

On est donc tenté de conjecturer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Or, pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \frac{(50 + x^{20})^2 - 2500}{x^{20}} = \frac{2500 + 100x^{20} + x^{40} - 2500}{x^{20}} = \frac{100x^{20} + x^{40}}{x^{20}} = 100 + x^{20}$

Ce qui permet de conclure que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 100$  !

Exercice n°28

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , donc par somme,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , donc par produit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  donc par soustraction,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x - 4 = -4$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  donc par somme  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 4 + \ln x) = -\infty$
- Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ , on pose  $u = x^2$ , et puisque  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$  on conclut que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+$  on conclut par quotient que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$
- Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , nous sommes en présence d'une forme indéterminée «  $\infty - \infty$  ». On transforme l'écriture :  $x - \ln x = x \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right)$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  (limite connue), on déduit successivement que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1$ , puis par produit, que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$ , c'est-à-dire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = +\infty$
- Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \ln(1) = 0$ , nous sommes en présence d'une forme indéterminée «  $\infty \cdot 0$  ». En posant  $X = \frac{1}{x}$ , puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0^+$ , la limite cherchée devient  $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1 + X)$ . Or un résultat du cours nous indique que  $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 1$
- En posant  $X = 2x$ , la limite cherchée devient  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + X)}{X}$ . Et puisque  $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$ , on conclut que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + X)}{X} = 2$ , c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} = 2$

Exercice n°29

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , donc par somme,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + e^x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4e^x = 0$  (car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ), donc par somme,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 4e^x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^x = +\infty$ , donc par soustraction,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} - 3e^x \right) = -\infty$

Exercice n°30

- Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  ( $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$  où on a posé  $u = -x$ ), on déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$  donc la droite d'équation  $y = -4$  est asymptote horizontale à  $C_f$  en  $+\infty$ . De plus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  donc par somme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .
- Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , on déduit, par somme et quotient, que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ , donc la droite d'équation  $y = 3$  est asymptote horizontale à  $C_f$  en  $-\infty$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , on déduit, par somme et quotient, que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , donc la droite d'équation  $y = 0$  (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à  $C_f$  en  $+\infty$ .

3) Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , alors par produit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = 0$ , alors par somme,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  (limite du cours) et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 = -\infty$ , alors par somme,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Mais comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ , on en déduit que la droite d'équation  $y = x - 2$  est asymptote oblique à  $C_f$  en  $-\infty$ .

4) Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , on déduit, par différence et quotient, que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ , donc la droite d'équation  $y = -1$  est asymptote horizontale à  $C_f$  en  $-\infty$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , on déduit, par différence et quotient, que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , donc la droite d'équation  $y = 0$  (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à  $C_f$  en  $+\infty$ .

Enfin, puisque  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^x - 1 = 0^-$  (car  $x < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$ ), on déduit que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$ . Et puisque

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^x - 1 = 0^+$  (car  $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$ ), on déduit que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$ . La droite d'équation  $x = 0$  (l'axe des ordonnées) est donc asymptote verticale à  $C_f$ .

### Exercice n°31

1) Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , on déduit, par somme et quotient, que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0}{1} = 0$ ,

2) On transforme l'expression : Pour tout réel  $x$ ,  $\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

( $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$  où on a posé  $u = -x$ ), on déduit, par somme et quotient que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

3) La courbe admet donc deux asymptotes horizontales :

La droite d'équation  $y = 0$  en  $-\infty$  et la droite d'équation  $y = 1$  en  $+\infty$

