

**TD LIMITE D'UNE FONCTION**  
**EXERCICES D'APPLICATIONS ET DE REFLEXIONS**

PROF: ATMANI NAJIB

1BAC SM BIOF

## LIMITE D'UNE FONCTION

**Exercice** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Montrer en utilisant la définition que :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Exercice2** : 1) monter que :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2) a) monter que :  $\forall x \in ]-1; 1[ : |x^2 + 5x| \leq 6|x|$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x$

**Exercice3** : monter que :  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

**Exercice4** : monter que :  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x+1} = 3$

**Exercice5** : étudier la limite de la fonction :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \text{ en } 0.$$

**Exercice6** : Soit la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

monter que :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$

**Exercice7** : Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

monter que :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$

**Exercice8** : Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x - E(x)$

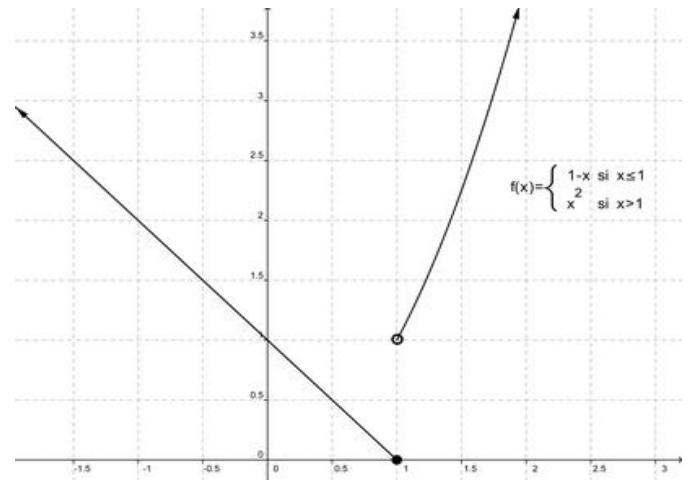
Où  $E$  désigne la partie entière.

- 1- Ecrire les expressions de  $f$  sans utiliser la partie entière sur les intervalles  $]0, 1[$  et  $]1, 2[$ .
- 2- Construire la courbe de la restriction de  $f$  sur  $[0, 2]$ .
- 3- La fonction  $f$  admet-elle une limite en 1.
- 4- Soit la fonction  $g(x) = x$  et  $h(x) = x - 1$ 
  - a) Remarquer que  $f$  et  $g$  sont confondues sur  $]0, 1[$  et que  $f$  et  $h$  sont confondues sur  $]1, 2[$
  - b) déterminer les limites de  $g$  et de  $h$  en 1.

**Exercice9** : Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

**Exercice10** :



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 - x \text{ si } x \leq 1$$

$$x \mapsto x^2 \text{ si } x > 1$$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction  $f$  à droite et à gauche de 1.

**Exercice11** : Soit la fonction  $g$  définie par :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 - x + 3 \text{ si } x \geq 1$$

$$x \mapsto -x^2 + x + \alpha \text{ si } x < 1$$

Déterminer  $\alpha$  pour que la fonction  $g$  admet une limite en 1.

**Exercice12** : Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de  $f$  en  $x_0 = -1$

**Exercice13** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{-3}{x^2+2}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Exercice14** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{1 + \sin x}{1 + \sqrt{x}}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Exercice15** : Soit la fonction :

$$f : x \mapsto (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x} \quad \text{déterminer : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

**Exercice16** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto 3x^2 + 5x + 1$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Exercice17** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto x + \sin x - 1$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Exercice18** : Soit  $f(x) = \frac{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f(x) \geq \frac{1}{x^2}$

2- En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**Exercice19** : déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x}$

**Exercice20** : déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2}$

**Exercice21** : déterminer :

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$       2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$

3)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$

**Exercice22** : calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$

**Exercice23** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^4$       2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3}$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6}$       4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$

**Exercice24** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$       2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$       3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

**Exercice25** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$       2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$       3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

**Exercice26** : Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

**Exercice27** : calculer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$       2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$       4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien



**TD LIMITE D'UNE FONCTION**

**EXERCICES D'APPLICATIONS ET DE REFLEXIONS AVEC SOLUTIONS**

PROF : ATMANI NAJIB

1BAC SM BIOF

**LIMITE D'UNE FONCTION**

**Exercice** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Montrer en utilisant la définition que :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Solution** : Montrons que :

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) (\forall x \in Df) (0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon ?$

Soit :  $x \in ]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$  donc  $|f(x)| = \left| \frac{x}{x+1} \right| \leq 2|x|$

Soit  $\varepsilon > 0$  on cherche  $\alpha > 0$  tel que :

$0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Pour avoir  $|f(x)| < \varepsilon$  il suffit d'avoir  $2|x| < \varepsilon$  et

$|x| < \frac{\varepsilon}{2}$  cad  $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $|x| < \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre  $\alpha$  le plus petit des

nombre :  $\frac{\varepsilon}{2}$  et  $\frac{1}{2}$

donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Exercice2** : 1) monter que :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2) a) monter que :  $\forall x \in ]-1; 1[ : |x^2 + 5x| \leq 6|x|$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x$

**Solution** : 1) on a  $\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right| \leq 1$

donc  $\left| x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right| \leq x^2$  et on a  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2) a) on a :  $|x^2 + 5x| = |x(x+5)| = |x||x+5|$

Et puisque :  $x \in ]-1; 1[$  alors :  $4 < x+5 < 6$

alors :  $|x+5| < 6$  donc  $|x^2 + 5x| \leq 6|x|$

b) puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} 6|x| = 0$  alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x = 0$

**Exercice3** : monter que :  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

**Solution** :  $x \in \mathbb{R}^* \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$  donc :

$|f(x) - 2| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$  et on a  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

**Exercice4** : monter que :  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x+1} = 3$

**Solution** :  $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$|f(x) - 3| = \left| \sqrt{2x+1} - 3 \right| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1} + 3}$

et on a  $\sqrt{2x+1} + 3 \geq 3$  donc :  $|f(x) - 3| \leq \frac{2}{3}|x-4|$

et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 4} |x-4| = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$

**Exercice5** : étudier la limite de la fonction :

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$  en 0.

**Solution** :

On remarque que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) :$

$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)}$

(on a multiplié par le conjugué)

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1}$  D'autre part :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*) (|f(x)| \leq |x|)$  et puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  alors

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Exercice6** : Soit la fonction définie par :

$f(x) = x^2 + 3x + 2$

monter que :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$

**Solution** :  $f(-1+h) - 6 = h^2 - 5h$

$|f(-1+h) - 6| = |h^2 - 5h| = |h||h-5|$

Si  $h \in ]-1; 1[$  alors :  $|f(-1+h) - 6| \leq 6|h|$

puisque :  $\lim_{h \rightarrow 0} 6|h| = 0$  alors :  $\lim_{h \rightarrow 0} f(-1+h) - 6 = 0$

donc :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$

**Exercice7 :** Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$

**Solution :**  $f(-1+h) - \frac{1}{3} = h^2 - 5h$

$$f(2+h) - \frac{1}{3} = \frac{2h}{3+h}$$

Si  $h \in ]-1;1[$  alors :  $\left| f(2+h) - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{2h}{3+h} \right| \leq |h|$

puisque :  $\lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$  alors :  $\lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) - \frac{1}{3} = 0$

donc :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$

**Exercice8 :** Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x - E(x)$

Où  $E$  désigne la partie entière.

- 1- Ecrire les expressions de  $f$  sans utiliser la partie entière sur les intervalles  $]0,1[$  et  $]1,2[$ .
- 2- Construire la courbe de la restriction de  $f$  sur  $[0,2]$ .
- 3- La fonction  $f$  admet-elle une limite en 1.
- 4- Soit la fonction  $g(x) = x$  et  $h(x) = x - 1$ 
  - a) Remarquer que  $f$  et  $g$  sont confondues sur  $]0,1[$  et que  $f$  et  $h$  sont confondues sur  $]1,2[$
  - b) déterminer les limites de  $g$  et de  $h$  en 1.

**Exercice9 :** Soit la fonction  $f: x \mapsto \frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

Si :  $x > 1$  :  $f(x) = \frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$

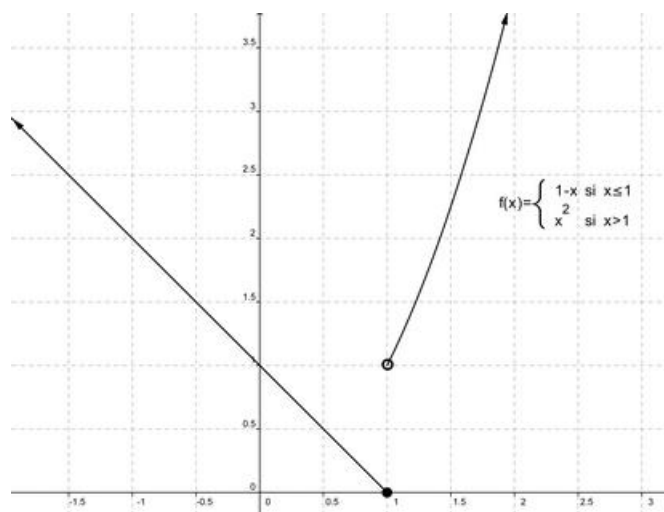
Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

Si :  $x < 1$  :  $f(x) = \frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x}{x+1}$

Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{x}{x+1} = -\frac{1}{2}$

Remarque :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

**Exercice10 :**



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 - x \text{ si } x \leq 1$$

$$x \mapsto x^2 \text{ si } x > 1$$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction  $f$  à droite et à gauche de 1.

**Exercice11 :** Soit la fonction  $g$  définie par :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 - x + 3 \text{ si } x \geq 1$$

$$x \mapsto -x^2 + x + \alpha \text{ si } x < 1$$

Déterminer  $\alpha$  pour que la fonction  $g$  admette une limite en 1.

**Exercice12 :** Soit la fonction  $f: x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de  $f$  en  $x_0 = -1$

**Solution :** Déterminons  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$  ?

Solution :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

Si :  $-1 < x < 1$  :  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$

Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$

Si :  $x < -1$  :  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$

Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$

donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0$  donc :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

**Exercice13** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{-3}{x^2+2}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Solution** :  $\forall x \in \mathbb{R}^*$  on a  $x^2+2 \geq x^2$  donc

$|f(x)| \leq \frac{3}{x^2}$  et on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = 0$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

**Exercice14** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Solution** :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$  on a  $1+\sqrt{x} \geq \sqrt{x}$  et

$0 \leq 1+\sin x \leq 2$  donc  $\left| \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$  donc

$|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$  et on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

**Exercice15** : Soit la fonction :

$f : x \mapsto (x^2+x^4) \sin \frac{1}{x}$  déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**Solution** :  $\forall x \in \mathbb{R}^*$  on a  $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$  et  $x^2+x^4 \geq 0$

donc  $-x^2-x^4 \leq (x^2+x^4) \sin \frac{1}{x} \leq x^2+x^4$  et puisque :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2+x^4 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2-x^4 = 0 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

**Exercice16** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto 3x^2+5x+1$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Solution** :  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  on a  $3x^2 \leq 3x^2+5x+1$  et et

puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**Exercice17** : Soit la fonction :  $f : x \mapsto x + \sin x - 1$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Solution** :  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc :

$x-2 \leq f(x) \leq x$  et puisque :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

**Exercice18** : Soit  $f(x) = \frac{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f(x) \geq \frac{1}{x^2}$

2- En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**Exercice19** : déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x}$

**Solution** :

on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

Donc Formes indéterminée : "+∞ - ∞"

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$$

puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = +\infty$

**Exercice20** : déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2}$

**Solution** : on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$

**Exercice21** : déterminer :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$$

**Solution** : 1) on a :  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} x^3+1 = 2$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = +\infty$

$$2) \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\left( 1 - \frac{1}{x} \right)^2}$$

et on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$  Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \left( 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3} \right)$$

on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$  et  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 \left( 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3} \right)$

on a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$  et  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = -\infty$

**Exercice22** : calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$

**Solution** : on a :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} 3x+1 = 4$

on a :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x - 2 = 0^+$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	$+$	$0$	$-$	$0$
				$\oplus$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2} = +\infty$

**Exercice23** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^4$     2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3}$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6}$     4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$

**Solution** : 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -7x^4 = -\infty$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$

**Exercice24** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$     2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$     3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

**Solution** : 1)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} = 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$  directement on trouve une

formes indéterminée : " $\frac{0}{0}$ "

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cosh}{\frac{h^2}{2}} \right) = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$

(On pose  $\sqrt{x} = h$ )

3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

On montre que :  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right)$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right)}{x - \frac{\pi}{6}}$

On pose  $x - \frac{\pi}{6} = h$  ) donc  $x \rightarrow \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

Donc :  $= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 2 \times 1 = 2$

**Exercice25** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$     2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$     3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

**Solution** : 1) on pose :  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq 1$  donc :  $|f(x)| \leq x^2$  et on a

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$  ? on pose :  $f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* |\cos x| \leq 1$  donc :  $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|^3}$  et on a

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$  ? on pose :  $f(x) = \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* -1 \leq \cos x \leq 1$  et  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc :

$0 \leq \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \leq 2$  donc  $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$  Alors :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$  ? on pose :  $f(x) = 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq \sqrt{x^4} \quad \text{cad } 2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq x^2$$

$$\text{donc : } \frac{1}{2 + \sqrt{x^4 + 1}} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{donc : } |f(x) - 1| \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0 \quad \text{Alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

**Exercice 26 :** Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

**Solution :**

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1 = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} -3x^2+x = -10$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2+x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

- 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ?$  et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

- 2)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) ?$  et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3} -2x^2+1 = -17 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \text{puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2+1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty \quad \text{alors : } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

4)  $k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$  donc :  $D_k = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0} -3x+1 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x = 0$

Etude du signe de :  $x^2 - 2x$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$x(x-2)$	$+$	$0$	$-$	$+$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2-2x = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2-2x = 0^+$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -3x+1 = -5 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2-2x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2-2x = 0^-$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$$

**Exercice 27 :** calculer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$       2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$       4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

**Solution :** 1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x}-2 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2+3x-10 = 0$

on trouve une formes indéterminée : " $\frac{0}{0}$ "

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}{(x^2+3x-10)(\sqrt{2x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-4)}{(\sqrt{2x}+2)(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(\sqrt{2x}+2)(x+5)} \times \frac{1}{(x-2)} = \frac{2}{14} \end{aligned}$$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1} ?$

On a :  $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$$\text{Et } 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = (x-1)(2x^2 + 5x + 1)$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 + 5x + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{8}{3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x \quad ?$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

on trouve une forme indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} \text{ or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{On pose } x - \frac{\pi}{4} = h \text{ donc } x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

$$\text{or : } \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

