Exercices avec solutions: sur les suites numériques

1 Définition de suites

Pour toutes les suites (u_n) définies ci-dessous, on demande de calculer u_1, u_2, u_3 et u_6.

1. $u_n = \dfrac{7n-2}{n+4}$.
2. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$
3. u_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.
4. u_n est la somme des n premiers nombres pairs strictement positifs.
5. u_n est le nombre de diviseurs positifs de n.
6. Je place 1 000 **Dh** sur mon livret A au taux de 2,5% par an.
   u_n est la somme dont je dispose la $n^{\text{ième}}$ année.
7. u_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale du nombre π.

2 Sens de variation d'une suite

Étudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. $u_n = 3n - 5$.
2. $u_n = -n^2 + 5n - 2$.
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.
4. $u_n = \dfrac{3^n}{2}$.
5. $u_n = \sqrt{n^2+3}$.
6. $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
7. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$.
8. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$.
9. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. *(plus difficile)*

Exercices avec solutions: sur les suites numériques

3 Majoration, minoration

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, par $u_n = 5 - \dfrac{1}{n}$.
   Montrer que la suite (u_n) est bornée.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$.
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = -n^2 + 8n + 1$.
   Montrer que (u_n) est majorée par 17.
4. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
   Montrer que (u_n) est majorée et minorée.

4 Suites arithmétiques

Les questions sont indépendantes.

1. On définit pour tout n la suite (u_n) par : $u_n = 3n - 2$.
   Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.
   Calculer le $9^{\text{ième}}$ terme, puis la somme : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8$.
3. Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison -2.
   Calculer u_{15}, puis la somme : $\Sigma = u_7 + u_8 + \ldots + u_{15}$.
4. Calculer : $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$.

5 Suites géométriques

Les questions sont indépendantes

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{7^{n+1}}{5}$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
2. Soit u_n une suite géométrique de premier terme $u_1 = \dfrac{1}{81}$ et de raison -3.
   Calculer u_7, puis $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_7$.
3. Calculer $\Sigma = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 4\ 096$.

Exercices avec solutions: sur les suites numériques

Les exercices qui suivent sont des extraits d'annales de bac. Il est assez fréquent d'avoir des suites le jour du bac et une grande partie de leur étude a été faite en première, vous êtes donc déjà très forts.

6 Suite "arithmético-géométrique"

Exercice très classique que vous avez de fortes chances de retrouver dans l'année.

On considère la suite (u_n) de nombres réels, définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

et la relation initiale $u_0 = 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 6$.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Calculer $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_9$ puis $S' = u_0 + u_1 + \ldots + u_9$.

7 Augmentation de loyer

Une personne loue une maison `a partir du premier janvier 1991. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 4 800 **dh** et le locataire s'engage `a occuper la maison pendant 9 ann´ees compl`etes.

Les valeurs décimales seront arrondies, si nécessaire, au centime près.

1. **Contrat n°1 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.
   (a) Calculer le loyer u_1 payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer u_n (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année) en fonction de n.
   (c) Calculer u_8.
   (d) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat.
2. **Contrat n°2 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 300 **dh** du loyer de l'ann´ee pr´ec´edente.
   (a) Calculer le loyer v_1 payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer v_n (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année) en fonction de n.
   (c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat. Quel est le contrat le plus avantageux ?

Exercices avec solutions: sur les suites numériques

8 Suites et représentation graphique

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1,\ u_2,\ u_3$ d'une part et $v_1,\ v_2,\ v_3$ d'autre part.
2. Dans un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$, d'unité graphique 5 cm, tracer les droites D et Δ d'équations respectives $y = \dfrac{3x+1}{4}$ et $y = x$.
   Utiliser D et Δ pour construire sur l'axe des abscisses les points $A_1,\ A_2,\ A_3$ d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$ ainsi que les points $B_1,\ B_2,\ B_3$ d'abscisses respectives $v_1,\ v_2,\ v_3$.
3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par : $s_n = u_n + v_n$.
   (a) Calculer s_0 , $s_1,\ s_2$ et s_3. À partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n) ?
   (b) On admet que la suite (s_n) est une suite constante égale à 2. (la démonstration n'est pas du programme de première)
4. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par : $d_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (d_n) est géométrique.
   (b) Donner l'expression de d_n en fonction de n.
5. En utilisant les questions **3.(b)** et **4.(b)**, donner l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

III Correction

1 Définition de suites

1. $u_1 = \dfrac{7 \times 1 - 2}{1+4} = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = \dfrac{19}{7}$ et $u_6 = 4$.
2. $u_1 = 2u_0 + 3 = 7,\ u_2 = 2u_1 + 3 = 17,\ u_3 = 37$, c'est une suite définie par récurrence, donc pour calculer u_6, je dois connaître u_4 et u_5.
   $u_4 = 2u_3 + 3 = 77,\ u_5 = 2u_4 + 3 = 157$ et enfin $u_6 = 2u_5 + 3 = 317$.
3. $u_1 = 2$ (1 n'est pas un nombre premier), $u_2 = 3,\ u_3 = 5$ et $u_6 = 13$.
4. $u_1 = 2,\ u_2 = 2 + 4 = 6,\ u_3 = 2 + 4 + 6 = 12$ et $u_6 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$.
5. $u_1 = 1\ u_2 = 2, u_3 = 2$ et $u_6 = 4$.
6. Pour augmenter un nombre de $t\%$, je le multiplie par $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$.
   $u_1 = 1\ 000 \times 1,025 = 1\ 025,\ u_2 = u_1 \times 1,025 = 1\ 000 \times (1,025)^2 \approx 1\ 050{,}63$
   $u_3 = 1\ 000 \times (1,025)^3 \approx 1\ 076{,}89$ et $u_6 = 1\ 000 \times (1,025)^6 \approx 1\ 159{,}69$.
7. $u_1 = 1,\ u_2 = 4,\ u_3 = 1$ et $u_6 = 2$.

2 Sens de variation d'une suite

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = 3(n+1) - 5 = 3n - 2$, donc :
   $u_{n+1} - u_n = (3n-2) - (3n-5) = 3 > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -(n+1)^2 + 5(n+1) - 2 - (-n^2 + 5n - 2) = -2n + 4$.
   Or $-2n+4$ est positif ssi $n \leqslant 2$ et négatif ssi $n \geqslant 2$, donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2.
3. Exemple d'utilisation des trois méthodes sur la même suite.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$, or $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
   - Tous les termes de la suite sont strictement positifs.
     Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+2}{n+3} \times \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3}$, or $n^2+4n+4 > n^2+4n+3$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et la suite (u_n) est croissante.
   - On a : $u_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$.
     f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = \dfrac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la suite (u_n) est croissante.
4. Tous les termes de la suite sont strictement positifs.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}}{2} \times \dfrac{2}{3^n} = 3 > 1$, donc la suite (u_n) est croissante.

5. On a : $u_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3}$

   f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ **alors** (u_n) est croissante

6. - Je ne peux pas appliquer la méthode du quotient car tous les termes de la suite ne sont pas strictement positifs.
   - Je ne peux pas appliquer la méthode utilisant une fonction car je ne sais pas étudier les variations de $x \mapsto \left(-\frac{1}{2}\right)^x$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
     $u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
     Or l'expression $-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ est positive lorsque n est impair et elle est négative lorsque n est pair, donc la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3$ et la suite (u_n) est croissante.

8. Tous les termes de la suite sont strictement positifs. (pour le prouver rigoureusement, il faudrait une méthode de démonstration qui est au programme de terminale, mais nous l'admettons ici)

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$, donc la suite (u_n) est décroissante.

9. Je pose $u_n = f(n)$, avec f définie sur $[0;+\infty[$, par : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

   f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$.

   Or $x + 1 \geqslant x > 0$ donc $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{x} > 0$ et $f'(x) \leqslant 0$. La fonction f est donc décroissante sur $]0;+\infty[$ et (u_n) est décroissante.

3 Majoration, minoration

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $-\frac{1}{n} < 0$ donc $u_n < 5$ et la suite est majorée par 5.

   D'autre part : $n \geqslant 1$ donc $\frac{1}{n} \leqslant 1$ et $u_n = 5 - \frac{1}{n} \geqslant 4$, donc (u_n) est minorée par 4.

   La suite (u_n) est bien bornée.

2. Je traite les deux questions par deux méthodes différentes.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - 2 = \frac{2n+1}{n+2} - 2 = \frac{2n+1-2(n+2)}{n+2} = \frac{-3}{n+2}$.

   Or $n + 3 > 0$, donc $\frac{-3}{n+2} < 0$ et $u_n - 2 < 0$, ce qui donne $u_n < 2$.

   La suite est majorée par 2.

   (b) Soit $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$, f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et

   $f'(x) = \frac{2(x+2) - 1(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$.

   La fonction f est donc croissante, de plus $f(0) = \frac{1}{2}$, donc f est minorée par $\frac{1}{2}$ et par conséquent (u_n) aussi.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - 17 = -n^2 + 8n + 1 - 17 = -n^2 + 8n - 16 = -(n+4)^2 < 0$.
   Donc $u_n < 17$ et la suite (u_n) est majorée par 17.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
   Or $n \geqslant 0$, donc $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant 1$. (Car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$.)
   Finalement $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc la suite (u_n) est bornée par 0 et 1.

4 Suites arithmétiques

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$, donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$
2. Le 9ième terme est $u_8 = 5 + 8 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{23}{3}$
   $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8 = 9 \times \dfrac{5 + \frac{23}{3}}{2} = 57$.
3. $u_{15} = u_1 + 14 \times (-2) = -26, \quad u_7 = u_1 + 6 \times (-2) = -10$,
   et $\Sigma = u_7 + u_8 + \ldots + u_{15} = 9 \times \dfrac{-10-26}{2} = -162$.
4. $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$ est la somme des termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 11$ et de raison $r = 3$.
   Soit n l'indice du dernier terme : $u_n = u_0 + nr \Leftrightarrow 173 = 11 + n \times 3 \Leftrightarrow n = 54$, il y a donc 55 termes dans la somme et : $S = 55 \times \dfrac{11+173}{2} = 5\ 060$.

5 Suites géométriques

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{7^{n+2}}{5} = 7 \times \dfrac{7^{n+1}}{5} = 7u_n$, donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{7}{5}$ et de raison 7.
2. $u_7 = u_1 \times (-3)^6 = \dfrac{1}{81} \times (-3)^6 = 9$ et $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_7 = \dfrac{1}{81} \times \dfrac{1-(-3)^7}{1-(-3)} = \dfrac{547}{81}$.
3. Σ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2
   Je cherche l'indice n du dernier terme : $u_n = u_0 q^n \Leftrightarrow 4\ 096 = 1 \times 2^n \Leftrightarrow n = 12$
   donc $\Sigma = 1 \times \dfrac{1-2^{13}}{1-2} = 8\ 191$.
   Remarque : Nous ne savons pas, pour l'instant, résoudre l'équation $2^n = 4\ 096$. Il faut faire des essais sur la calculatrice.

6 Suite "arithmético-géométrique"

1. Calculer $u_1 = 4,\ u_2 = 5$ et $u_3 = \dfrac{11}{2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \frac{1}{2}\,u_n + 3 - 6 \\ &= \frac{1}{2}(v_n + 6) - 3 \\ &= \frac{1}{2}\,v_n \end{aligned}$.

   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$
3. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = -4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 6$.
4. On a : $S = -4 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = -\dfrac{1\ 023}{128}$

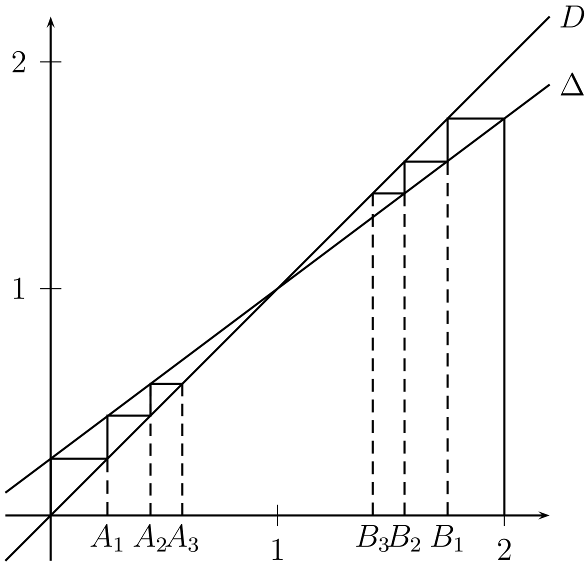
   et $S' = u_0 + u_1 \ldots + u_9 = v_0 + 6 + v_1 + 6 + \ldots v_9 + 6 = -\dfrac{1\ 023}{128} + 6 \times 10 = \dfrac{6\ 657}{128}$.

7 Augmentation de loyer

1. **Contrat n°1 :**
   (a) $u_1 = 4\ 800 \times 1,05 = 5\ 040$.
   (b) $u_n = 4\ 800 \times 1,05^n$, c'est suite géométrique.
   (c) $u_8 = 4\ 800 \times 1,05^8 \approx 7\ 091{,}79$.
   (d) $u_0 + u_1 + \ldots + u_8 = 4\ 800 \times \dfrac{1 - 1,05^9}{1 - 1,05} \approx 52\ 927{,}51$
2. **Contrat n°2 :**
   (a) $v_1 = v_0 + 300 = 5\ 100$.
   (b) $v_n = 4\ 800 + 300n$, c'est une suite arithmétique.
   (c) $v_8 = 7\ 200$
   (d) $v_0 + v_1 + \ldots + v_8 = 9 \times \dfrac{4\ 800 + 7\ 200}{2} = 54\ 000$. Le premier contrat est donc plus avantageux pour le locataire.

8 Suites et représentation graphique

1. $u_1 = \dfrac{1}{4}$, $u_2 = \dfrac{7}{16}$, $u_3 = \dfrac{37}{64}$ et $v_1 = \dfrac{7}{4}$, $v_2 = \dfrac{25}{16}$, $v_3 = \dfrac{91}{64}$.



3. $s_0 = 2$, $s_1 = 2$, $s_3 = 2$ et $s_3 = 2$. On peut conjecturer que la suite (s_n) est constante égale à 2.
4. (a) Pout tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} d_{n+1} = \; & v_{n+1} - u_{n+1} \\ & \frac{3v_n+1}{4} - \frac{3u_n+1}{4} \\ & = \frac{3}{4}(v_n - u_n) \\ & = \frac{3}{4}d_n \end{aligned}$$
Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}, d_n = d_0 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
5. On a : $\begin{cases} v_n + u_n = s_n \\ v_n - u_n = d_n \end{cases}$ ssi $\begin{cases} v_n = \dfrac{s_n + d_n}{2} \\ u_n = \dfrac{s_n - d_n}{2} \end{cases}$, donc $\begin{cases} v_n = 1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \\ u_n = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \end{cases}$.