

## EXERCICES CORRIGES

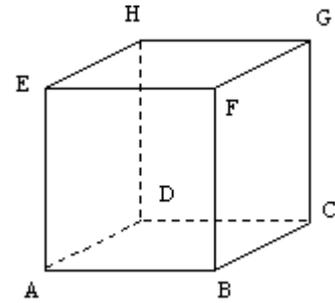
### Exercice n°1.

Un cube ABCDEFGH est représenté ci-contre :

Les quadruplets de points suivants déterminent-ils un repère de l'espace ?

Ce repère est-il orthonormal ?

- |                 |              |
|-----------------|--------------|
| 1) a) (D,A,C,H) | b) (D,A,B,H) |
| c) (D,B,F,H)    | d) (D,C,H,E) |
| e) (A,B,C,G)    | f) (A,B,C,F) |
| g) (A,B,C,H)    | h) (A,B,C,E) |

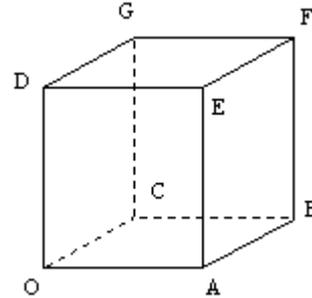


### Exercice n°2.

Considérons le cube ci-contre, d'arête égale à 1

On considère le repère  $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD})$ .

- Donner les coordonnées des sommets du cube.
- Quelles sont les coordonnées du milieu de [AE] ?
- Quelles sont les coordonnées du centre I du carré DEFG ?
- Quels sont les points de coordonnées respectives  $\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ ;  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ ;  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  ?



### Exercice n°3.

ABCDEFGH est un pavé droit..

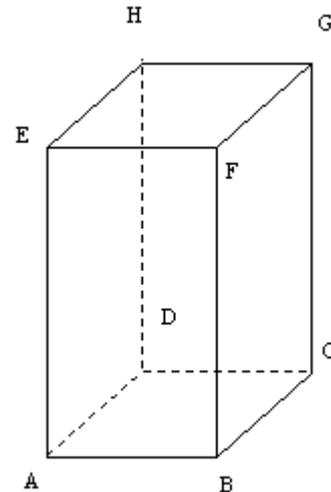
AB=AD=1.

AE=2

I est le milieu de [DH]

Calculez les coordonnées de chacun des huit sommets dans chacun des repères suivants :

- $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH})$
- $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DI})$



### Exercice n°4.

On considère un repère orthonormal  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$

- A est le point de coordonnées (1 ; 1 ; 0).
  - Quelle est la nature du quadrilatère OIAJ ?
  - Calculez OA
- B est le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1).
  - Quelle est la nature du quadrilatère OJBK ?
  - Calculez OB

### Exercice n°5.

Les points A et B ont pour coordonnées respectives (3;5;-2) et (4;-3;1).

- Calculer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
- Calculer les coordonnées du point I, milieu de [AB].

### Exercice n°6.

Dans un repère orthornormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points A(2,4,-7) et B (-2,1,-1).

Calculer la norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$

### Exercice n°7.

- Les vecteurs  $\vec{u}(3;6;12)$  et  $\vec{v}(2;4;8)$  sont ils colinéaires ?
- Quelles sont les coordonnées du vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  ?
- Quelles sont les coordonnées du vecteur  $2\vec{u} - 5\vec{v}$  ?

### Exercice n°8.

Soient A(-2 ; 1 ; 10) ; B(-3 ; 1 ; -2) et C le point tel que  $\overrightarrow{OC} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ .

Déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{u} = 4\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$ .

Exercice n°9.

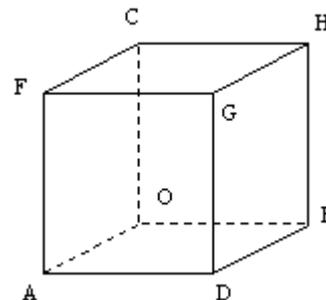
Dans le cube ci-dessous, on considère le repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  tel que

$$\vec{OA} = 10\vec{i}, \vec{OB} = 10\vec{j} \text{ et } \vec{OC} = 10\vec{k}$$

Déterminer les coordonnées des points E,F,G,H,L et K définis vectoriellement par

$$\vec{OE} = \frac{3}{2}\vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB} - \frac{3}{10}\vec{OC}$$

$$\vec{OK} = \frac{6}{5}\vec{OG} + \frac{1}{5}\vec{OE} \text{ et } \vec{AL} = \frac{2}{5}\vec{DB} - \frac{1}{2}\vec{OF}$$

Exercice n°10.

Dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points : A(3;0;0) B(0;5;0) et C(0;0;4). Calculez les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC.

Exercice n°11.

Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points A(2;1;3) B(4;-1;5) et C(4;2;-7)

- 1) Montrez que les points A,B et C ne sont pas alignés.
- 2) Calculez les coordonnées des points :
  - a) D tel que  $2\vec{AB} + 3\vec{AD} = \vec{BC}$
  - b) E est le milieu de [BC]
  - c) F est le centre de gravité du triangle ABC.
  - d) G vérifie  $3\vec{GA} - 2\vec{GB} = \vec{CG}$

Exercice n°12.

Soient A(-1 ; -2 ; -3) , B(1 ; 1 ; 1) et C(3 ; 4 ; 5). Montrer que les points A,B et C sont alignés.

Exercice n°13.

Soient A(2 ; 1 ; 5),  $B\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$  et C(0 ; -5 ; 3). Déterminer les coordonnées du point D pour que (ABCD) soit un parallélogramme.

Exercice n°14.

Soient  $A\left(1; 3; \frac{1}{2}\right)$ , B(-1 ; 4 ; 1), C(2 ; 3 ; 0) et D(1 ; 4 ; 0). Montrer que les points A,B,C et D sont coplanaires.

Exercice n°15.

Le plan P a pour équation :  $x + 3y - z + 7 = 0$

- 1) Donner un vecteur normal à P
- 2) a) Donner les coordonnées d'un point M de P.
- b) Le point L(1;-1;2) appartient-il au plan P ?
- c) Déterminer le réel z pour que le point N(2;5;z) appartienne au plan P.

Exercice n°16.

Le plan P a pour équation :  $2x + y + z = 6$

- 1) Donner un vecteur normal à P
- 2) a) Déterminer les coordonnées du point A, intersection du plan P avec l'axe des abscisses (Ox).
- b) Déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives du plan P avec les axes (Oy) et (Oz).
- 3) Dans un repère de l'espace, placer les points A,B et C. Tracer les droites (AB), (AC) et (BC), traces du plan P sur les plans de coordonnées

Exercice n°17.

Dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points A(-3;4;6) B(2;3;1) C(1;3;3) et D(6;2;-2)

- 1) Calculez les coordonnées des vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  et  $\vec{CD}$
- 2) a) Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont ils colinéaires ?
- b) Justifiez que les droites (AB) et (CD) sont parallèles

- 3) On considère l'équation (E)  $2x + 5y + z = 20$  et le point  $F(1;1;1)$
- Vérifiez que les coordonnées des points A,B,C et D vérifient cette équation.
  - Déterminez les coordonnées de S tels que A,B et S soient alignés et  $x_s = 7$
  - Déterminez les coordonnées du point P vérifiant l'équation (E) et tel que O,F et P soient alignés.

Exercice n°18.

Déterminer un vecteur normal  $\vec{n}$  pour chacun des plans suivants :

$$P_1 : -x + y + 2z - 1 = 0 \quad P_2 : 3x - y = 0 \quad P_3 : 2y - 1 = 0 \quad P_4 : 2x - z + 3 = 0$$

Exercice n°19.

Déterminer une équation du plan  $P$  passant par le point A et de vecteur normal  $\vec{n}$

- A(2;-3;5) et  $\vec{n}(3;2;1)$
- A(4;-2;1) et  $\vec{n}(5;3;2)$
- A(1;1;0) et  $\vec{n}(0;2;1)$

Exercice n°20.

On considère le plan  $P$  d'équation :  $2x - 3y + 6z - 18 = 0$

- Donner un vecteur normal  $\vec{n}$  au plan  $P$
- Déterminer une équation du plan  $P'$  parallèle au plan  $P$  passant par le point B(6;-4;-4).

Exercice n°21.

On considère les plans  $P$  et  $P'$  de l'exercice précédent.

Déterminer le point A du plan  $P$  tel que  $\overline{AB}$  et  $\vec{n}$  soient colinéaires.

En déduire la distance entre les plans parallèles  $P$  et  $P'$ .

Exercice n°22.

Dans chacun des cas suivants, préciser si les plans  $P$  et  $P'$  sont parallèles :

- $P$  d'équation  $2x + y - z = 5$  et  $P'$  d'équation  $-x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 7$
- $P$  d'équation  $x + 3y - 5z = 4$  et  $P'$  d'équation  $-3x - 9y + 15z = -6$
- $P$  d'équation  $x + 3y - 2z = 8$  et  $P'$  d'équation  $-4x - 12y + 8z = -32$

Exercice n°23.

On considère les points A(2;1;1), B(3;0;2) et C(0;2;1).

On cherche à déterminer une équation du plan (ABC) de la forme  $ax + by + cz = d$ , par deux méthodes différentes.

- Donner les coordonnées des vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$ . Vérifiez que les points A,B et C définissent un plan (ABC).
  - Déterminer un vecteur normal  $\vec{n}(a;b;c)$  au plan (ABC). (on pourra écrire que  $\overline{AB} \cdot \vec{n} = 0$  et  $\overline{AC} \cdot \vec{n} = 0$ , et choisir a=1)
  - En déduire une équation du plan (ABC)
- En écrivant que chacun des points A,B et C appartient au plan (ABC), déterminer une équation de ce plan (On sera amené à choisir une valeur pour l'un des nombres  $a, b, c$  ou  $d$ .)

Exercice n°24.

Soient les deux plans  $P$  et  $P'$  d'équations respectives dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$\text{Pour } P : (\cos t)x + (\sin t)y - z = 0$$

$$\text{Pour } P' : (\cos t)x + (\sin t)y + z = 0$$

où  $t$  représente un paramètre réel.

- $P$  et  $P'$  sont-ils perpendiculaires? Justifier.
- Pour quelles valeurs de  $t$  l'axe Ox est-il parallèle à  $P$ ?
- Donner un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans.
- Calculer la distance de A(cos  $t$ , sin  $t$ , -3) au plan  $P$ .

## CORRECTION

## Exercice n°1

Le quadruplet (D,A,C,H) détermine un repère orthonormal de l'espace car les vecteurs  $\overline{DA}$ ,  $\overline{DC}$  et  $\overline{DH}$  ne sont pas coplanaires et sont même orthogonaux deux à deux

Le quadruplet (D,A,B,H) détermine un repère de l'espace car les vecteurs  $\overline{DA}$ ,  $\overline{DB}$  et  $\overline{DH}$  ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs  $\overline{DA}$  et  $\overline{DB}$  ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (D,B,F,H) ne détermine pas un repère de l'espace car le vecteur  $\overline{DF}$  s'exprime à l'aide de  $\overline{DB}$  et  $\overline{DH}$  (en effet  $\overline{DF} = \frac{1}{2}(\overline{DB} + \overline{DH}) = \frac{1}{2}\overline{DB} + \frac{1}{2}\overline{DH}$ )

Le quadruplet (D,C,H,E) détermine un repère de l'espace car les vecteurs  $\overline{DC}$ ,  $\overline{DH}$  et  $\overline{DE}$  ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs  $\overline{DH}$  et  $\overline{DE}$  ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,G) détermine un repère de l'espace car les vecteurs  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  et  $\overline{AG}$  ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,F) détermine un repère de l'espace car les vecteurs  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  et  $\overline{AF}$  ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,H) détermine un repère de l'espace car les vecteurs  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  et  $\overline{AH}$  ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  ne sont pas orthogonaux

Le quadruplet (A,B,C,E) détermine un repère de l'espace car les vecteurs  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  et  $\overline{AE}$  ne sont pas coplanaires. En revanche ce repère n'est pas orthonormal car les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  ne sont pas orthogonaux

## Exercice n°2

1) Le point O étant l'origine du repère, on aura O(0 ; 0 ; 0)

Puisque  $\overline{OA} = 1 \times \overline{OA} + 0 \times \overline{OC} + 0 \times \overline{OD}$ , on aura A(1 ; 0 ; 0). Puisque  $\overline{OB} = 1 \times \overline{OA} + 1 \times \overline{OC} + 0 \times \overline{OD}$ , on aura B(1 ; 1 ; 0)

Puisque  $\overline{OC} = 0 \times \overline{OA} + 1 \times \overline{OC} + 0 \times \overline{OD}$ , on aura C(0 ; 1 ; 0). Puisque  $\overline{OD} = 0 \times \overline{OA} + 0 \times \overline{OC} + 1 \times \overline{OD}$ , on aura D(0 ; 0 ; 1)

Puisque  $\overline{OE} = 1 \times \overline{OA} + 0 \times \overline{OC} + 1 \times \overline{OD}$ , on aura E(1 ; 0 ; 1). Puisque  $\overline{OF} = 1 \times \overline{OA} + 1 \times \overline{OC} + 1 \times \overline{OD}$ , on aura F(1 ; 1 ; 1)

Puisque  $\overline{OG} = 0 \times \overline{OA} + 1 \times \overline{OC} + 1 \times \overline{OD}$ , on aura G(0 ; 1 ; 1)

2) Le milieu de [AE] aura pour coordonnées  $\left( \frac{x_A + x_E}{2} = 1; \frac{y_A + y_E}{2} = 0; \frac{z_A + z_E}{2} = 1 \right)$

3) Le centre I du carré DEFG est le milieu de chacune de ses diagonales, donc a pour coordonnées  $\left( \frac{x_D + x_F}{2} = 1; \frac{y_D + y_F}{2} = 1; \frac{z_D + z_F}{2} = 1 \right)$

4) Le point de coordonnées  $\left( 0; 0; \frac{1}{2} \right)$  est le milieu de [OD]. Le point de coordonnées  $\left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right)$  est le milieu de [OB]. Le

point de coordonnées  $\left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$  est le milieu de [OF].

## Exercice n°3

1) Dans le repère (D;  $\overline{DA}$ ;  $\overline{DC}$ ;  $\overline{DH}$ ) : Le point D étant l'origine du repère, on aura D(0 ; 0 ; 0)

Puisque  $\overline{DA} = 1 \times \overline{DA} + 0 \times \overline{DC} + 0 \times \overline{DH}$ , on aura A(1 ; 0 ; 0). Puisque  $\overline{DB} = 1 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 0 \times \overline{DH}$ , on aura B(1 ; 1 ; 0)

Puisque  $\overline{DC} = 0 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 0 \times \overline{DH}$ , on aura C(0 ; 1 ; 0). Puisque  $\overline{DE} = 1 \times \overline{DA} + 0 \times \overline{DC} + 1 \times \overline{DH}$ , on aura E(1 ; 0 ; 1)

Puisque  $\overline{DF} = 1 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 1 \times \overline{DH}$ , on aura F(1 ; 1 ; 1). Puisque  $\overline{DG} = 0 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 1 \times \overline{DH}$ , on aura G(0 ; 1 ; 1)

Puisque  $\overline{DH} = 0 \times \overline{DA} + 0 \times \overline{DC} + 1 \times \overline{DH}$ , on aura H(0 ; 0 ; 1)

Dans le repère (D;  $\overline{DA}$ ;  $\overline{DC}$ ;  $\overline{DI}$ ) : Le point D étant l'origine du repère, on aura D(0 ; 0 ; 0)

Puisque  $\overline{DA} = 1 \times \overline{DA} + 0 \times \overline{DC} + 0 \times \overline{DI}$ , on aura A(1 ; 0 ; 0). Puisque  $\overline{DB} = 1 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 0 \times \overline{DI}$ , on aura B(1 ; 1 ; 0)

Puisque  $\overline{DC} = 0 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 0 \times \overline{DI}$ , on aura C(0 ; 1 ; 0). Puisque  $\overline{DE} = 1 \times \overline{DA} + 0 \times \overline{DC} + 2 \times \overline{DI}$ , on aura E(1 ; 0 ; 2)

Puisque  $\overline{DF} = 1 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 2 \times \overline{DI}$ , on aura F(1 ; 1 ; 2). Puisque  $\overline{DG} = 0 \times \overline{DA} + 1 \times \overline{DC} + 2 \times \overline{DI}$ , on aura G(0 ; 1 ; 2)

Puisque  $\overline{DH} = 0 \times \overline{DA} + 0 \times \overline{DC} + 2 \times \overline{DI}$ , on aura H(0 ; 0 ; 2)

Exercice n°4

1) a) Puisque A est le point de coordonnées (1 ; 1 ; 0), cela signifie que  $\overrightarrow{OA} = 1 \times \overrightarrow{OI} + 1 \times \overrightarrow{OJ} + 0 \times \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$ . Le quadrilatère OIAJ est donc un parallélogramme.

b) Dans le repère orthonormal  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$ , on a  $OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 + (z_A - z_O)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

2) a) Puisque B est le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1), cela signifie que  $\overrightarrow{OB} = 0 \times \overrightarrow{OI} + 1 \times \overrightarrow{OJ} + 1 \times \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK}$ . Le quadrilatère OJBK est donc un parallélogramme.

b) Dans le repère orthonormal  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$ , on a  $OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2 + (z_B - z_O)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Exercice n°5

$$1) \overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = -8 \\ z_B - z_A = 3 \end{cases} \quad 2) \text{ Si I est le milieu de [AB], alors } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice n°6

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{61}$$

Exercice n°7

1) Les vecteurs  $\vec{u}(3; 6; 12)$  et  $\vec{v}(2; 4; 8)$  sont colinéaires car  $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{u}$

2) Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\vec{u} + \vec{v}(5; 10; 20)$

3) Le vecteur  $2\vec{u}$  a pour coordonnées  $2\vec{u}(6; 12; 24)$ . Le vecteur  $5\vec{v}$  a pour coordonnées  $5\vec{v}(10; 20; 40)$ .

En soustrayant les coordonnées des deux vecteurs  $2\vec{u}$  et  $5\vec{v}$ , le vecteur  $2\vec{u} - 5\vec{v}$  aura donc pour coordonnées  $2\vec{u} - 5\vec{v}(-4; -8; -16)$

Exercice n°8

Si  $\overrightarrow{OC} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$  alors les coordonnées de C sont C(5 ; 4 ; -1)

$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ a donc pour coordonnées } \overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = -1 \\ y_B - y_A = 0 \\ z_B - z_A = -12 \end{cases} \text{ donc } 2\overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } 2\overrightarrow{AB} \begin{cases} -2 \\ 0 \\ -24 \end{cases}$$

$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{AC} \text{ a donc pour coordonnées } \overrightarrow{AC} \begin{cases} x_C - x_A = 7 \\ y_C - y_A = 3 \\ z_C - z_A = -11 \end{cases} \text{ donc } 4\overrightarrow{AC} \text{ a pour coordonnées } 4\overrightarrow{AC} \begin{cases} 28 \\ 12 \\ -44 \end{cases}$$

En additionnant les coordonnées des deux précédents vecteurs, le vecteur  $\vec{u} = 4\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$  aura donc pour coordonnées

$$\vec{u} = 4\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} \begin{cases} -2 + 28 = 26 \\ 0 + 12 = 12 \\ -24 + (-44) = -68 \end{cases}$$

Exercice n°9

Dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , les coordonnées de A sont A(10 ; 0 ; 0), celles de B(0 ; 10 ; 0) et celles de

$$C(0 ; 0 ; 10). \text{ Ainsi } \overrightarrow{OA} \begin{vmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \overrightarrow{OB} \begin{vmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OC} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{vmatrix}$$

Puisque  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ , les coordonnées de  $\overrightarrow{OD}$  donc celles de D, sont  $\overrightarrow{OD}(10;10;0)$ . Ainsi D(10 ; 10 ; 0)

Le vecteur  $\overrightarrow{OE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} - \frac{3}{10}\overrightarrow{OC}$  a donc pour coordonnées  $\overrightarrow{OE}\left(\frac{3}{2}\times 10 = 15; \frac{2}{5}\times 10 = 4; -\frac{3}{10}\times 10 = -3\right)$ , donc le point E a pour coordonnées E(15; 4; -3)

Puisque  $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ , les coordonnées de  $\overrightarrow{OF}$  donc celles de F, sont  $\overrightarrow{OF}(10;0;10)$ . Ainsi F(10 ; 0 ; 10)

Puisque  $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ , les coordonnées de  $\overrightarrow{OG}$  donc celles de G, sont  $\overrightarrow{OG}(10;10;10)$ . Ainsi G(10 ; 10 ; 10)

Puisque  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ , les coordonnées de  $\overrightarrow{OH}$  donc celles de H, sont  $\overrightarrow{OH}(0;10;10)$ . Ainsi H(0 ; 10 ; 10)

Puisque  $\overrightarrow{OK} = \frac{6}{5}\overrightarrow{OG} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OE}$ , les coordonnées de  $\overrightarrow{OK}$  donc celles de K, sont  $\overrightarrow{OK}\left(\frac{6}{5}\times 10 + \frac{1}{5}\times 15 = 15; \frac{6}{5}\times 10 + \frac{1}{5}\times 4 = \frac{64}{5}; \frac{6}{5}\times 10 + \frac{1}{5}\times (-3) = \frac{57}{5}\right)$ . Ainsi K $\left(15; \frac{64}{5}; \frac{57}{5}\right)$

Notons  $L(x; y; z)$ . D'une part les coordonnées de  $\overrightarrow{AL}$  sont  $\overrightarrow{AL} \begin{cases} x - x_A = x - 10 \\ y - y_A = y \\ z - z_A = z \end{cases}$ . D'autre part, les coordonnées de

$$\frac{2}{5}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OF} \text{ sont } \frac{2}{5}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OF} \begin{cases} \frac{2}{5}\times(x_B - x_D) - \frac{1}{2}\times(x_F - x_O) = \frac{2}{5}\times(-10) - \frac{1}{2}\times 10 = -9 \\ \frac{2}{5}\times(y_B - y_D) - \frac{1}{2}\times(y_F - y_O) = \frac{2}{5}\times 0 - \frac{1}{2}\times 0 = 0 \\ \frac{2}{5}\times(z_B - z_D) - \frac{1}{2}\times(z_F - z_O) = \frac{2}{5}\times 0 - \frac{1}{2}\times 10 = -5 \end{cases}$$

De l'égalité  $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OF}$ , on déduit  $\begin{cases} x - 10 = -9 \\ y = 0 \\ z = -5 \end{cases}$ . Le point L a donc pour coordonnées L(1 ; 0 ; -5)

### Exercice n°10

1<sup>ère</sup> méthode Le point G centre de gravité du triangle ABC est le barycentre du système  $\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$ . Ainsi

$$\begin{cases} x_G = \frac{1 \times x_A + 1 \times x_B + 1 \times x_C}{1 + 1 + 1} = \frac{3}{3} = 1 \\ y_G = \frac{1 \times y_A + 1 \times y_B + 1 \times y_C}{1 + 1 + 1} = \frac{5}{3} \\ z_G = \frac{1 \times z_A + 1 \times z_B + 1 \times z_C}{1 + 1 + 1} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

2<sup>ème</sup> méthode : Le point G vérifie l'égalité vectorielle  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$  où I est le milieu de [BC]

Le point I a pour coordonnées  $\left(\frac{x_B + x_C}{2} = 0; \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5}{2}; \frac{z_B + z_C}{2} = 2\right)$

Le vecteur  $\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$  a donc pour coordonnées  $\left(\frac{2}{3}(x_I - x_A) = -2; \frac{2}{3}(y_I - y_A) = \frac{5}{3}; \frac{2}{3}(z_I - z_A) = \frac{4}{3}\right)$

Notons  $G(x; y; z)$ . D'une part les coordonnées de  $\overrightarrow{AG}$  sont  $\overrightarrow{AG} \begin{cases} x - x_A = x - 3 \\ y - y_A = y \\ z - z_A = z \end{cases}$ .

$$\text{L'égalité } \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AI} \text{ implique } \begin{cases} x-3 = -2 \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases} . \text{ On retrouve bien les coordonnées de } G\left(1; -\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

Exercice n°11

1) On calcule les coordonnées des vecteurs  $\overline{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 2 \\ y_B - y_A = -2 \\ z_B - z_A = 2 \end{cases}$  et  $\overline{AC} \begin{cases} x_C - x_A = 2 \\ y_C - y_A = 1 \\ z_C - z_A = -10 \end{cases}$ . Les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  ne sont

pas colinéaires car il n'existe pas de réel  $k$  unique satisfaisant aux trois conditions  $\begin{cases} 2k = 2 \\ -2k = 1 \\ 2k = -10 \end{cases}$ . Les points A, B et C ne

sont donc pas alignés.

2) a) Notons  $D(x; y; z)$ . Alors  $\overline{AD} \begin{cases} x_D - x_A = x - 2 \\ y_D - y_A = y - 1 \\ z_D - z_A = z - 3 \end{cases}$  donc  $3\overline{AD} \begin{cases} 3(x_D - x_A) = 3x - 6 \\ 3(y_D - y_A) = 3y - 3 \\ 3(z_D - z_A) = 3z - 9 \end{cases}$ . Comme  $2\overline{AB} \begin{cases} 2(x_B - x_A) = 4 \\ 2(y_B - y_A) = -4 \\ 2(z_B - z_A) = 4 \end{cases}$

et  $\overline{BC} \begin{cases} x_C - x_B = 0 \\ y_C - y_B = 3 \\ z_C - z_B = -12 \end{cases}$ , l'égalité  $2\overline{AB} + 3\overline{AD} = \overline{BC}$  entraîne  $\begin{cases} 4 + 3x - 6 = 0 \\ -4 + 3y - 3 = 3 \\ 4 + 3z - 9 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{10}{3} \\ z = -\frac{7}{3} \end{cases}$ . Ainsi  $D\left(\frac{2}{3}; \frac{10}{3}; -\frac{7}{3}\right)$ .

b) Les coordonnées du milieu E de [BC] sont  $\left(x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = 4; y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1}{2}; z_E = \frac{z_B + z_C}{2} = -1\right)$

c) 1<sup>ère</sup> méthode : Le point F centre de gravité du triangle ABC est le barycentre du système  $\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$ .

$$\text{Ainsi } \begin{cases} x_F = \frac{1 \times x_A + 1 \times x_B + 1 \times x_C}{1+1+1} = \frac{10}{3} \\ y_F = \frac{1 \times y_A + 1 \times y_B + 1 \times y_C}{1+1+1} = \frac{2}{3} \\ z_F = \frac{1 \times z_A + 1 \times z_B + 1 \times z_C}{1+1+1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

2<sup>ème</sup> méthode : On aurait pu utiliser l'égalité vectorielle  $\overline{AF} = \frac{2}{3}\overline{AE}$  vérifiée par le point F.

d) Notons  $G(x; y; z)$ . Alors  $\overline{GA} \begin{cases} x_A - x_G = 2 - x \\ y_A - y_G = 1 - y \\ z_A - z_G = 3 - z \end{cases}$  donc  $3\overline{GA} \begin{cases} 3(x_A - x_G) = 6 - 3x \\ 3(y_A - y_G) = 3 - 3y \\ 3(z_A - z_G) = 9 - 3z \end{cases}$ . De plus  $\overline{GB} \begin{cases} x_B - x_G = 4 - x \\ y_B - y_G = -1 - y \\ z_B - z_G = 5 - z \end{cases}$

$$2\overline{GB} \begin{cases} 2(x_B - x_G) = 8 - 2x \\ 2(y_B - y_G) = -2 - 2y \\ 2(z_B - z_G) = 10 - 2z \end{cases} . \text{ Enfin } \overline{CG} \begin{cases} x_G - x_C = x - 4 \\ y_G - y_C = y - 2 \\ z_G - z_C = z + 7 \end{cases}$$

De l'égalité  $3\overline{GA} - 2\overline{GB} = \overline{CG}$ , on déduit  $\begin{cases} 6 - 3x - (8 - 2x) = x - 4 \\ 3 - 3y - (-2 - 2y) = y - 2 \\ 9 - 3z - (10 - 2z) = z + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 2y = 7 \\ 2z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{7}{2} \\ z = -4 \end{cases}$ . Ainsi  $G\left(1; \frac{7}{2}; -4\right)$

Exercice n°12

On calcule les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$   $\begin{cases} x_B - x_A = 2 \\ y_B - y_A = 3 \\ z_B - z_A = 4 \end{cases}$  et  $\overrightarrow{AC}$   $\begin{cases} x_C - x_A = 4 \\ y_C - y_A = 6 \\ z_C - z_A = 8 \end{cases}$ . Puisque  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ , les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.

Exercice n°13

ABCD est un parallélogramme si et seulement si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

Les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  sont  $\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = -\frac{3}{2} \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = -\frac{9}{2} \end{cases}$ . Si on note  $D(x; y; z)$ , les coordonnées de  $\overrightarrow{DC}$  sont

$$\overrightarrow{DC} \begin{cases} x_C - x = -x \\ y_C - y = -5 - y \\ z_C - z = 3 - z \end{cases} \text{ L'égalité } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ entraîne donc } \begin{cases} -x = -\frac{3}{2} \\ -5 - y = -1 \\ 3 - z = -\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -4 \\ z = \frac{15}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées de D sont donc  $D\left(\frac{3}{2}; -4; \frac{15}{2}\right)$

Exercice n°14

On calcule les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = -2 \\ y_B - y_A = 1 \\ z_B - z_A = \frac{1}{2} \end{cases}$ ,  $\overrightarrow{AC} \begin{cases} x_C - x_A = 1 \\ y_C - y_A = 0 \\ z_C - z_A = -\frac{1}{2} \end{cases}$  et  $\overrightarrow{AD} \begin{cases} x_D - x_A = 0 \\ y_D - y_A = 1 \\ z_D - z_A = -\frac{1}{2} \end{cases}$

D'après leur coordonnées, on constate que  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ , ce qui implique que le point D appartient au plan formé par les trois autres points A, B, C, donc que A, B, C et D sont coplanaires

Exercice n°15

1) Un vecteur normal au plan P est le vecteur  $\vec{n}(1; 3; -1)$

2) a) Un point M de P est, par exemple  $M(0; 0; 7)$

b) Le point L(1; -1; 2) appartient au plan P si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan P.

On calcule  $x_L + 3y_L - z_L + 7 = 1 + 3 \times (-1) - 2 + 7 = 3 \neq 0$ . Les coordonnées de L ne vérifiant pas l'équation du plan P, le point L n'appartient pas à P

c) Le point N(2; 5; z) appartient au plan P si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan P, donc si et seulement si  $x_N + 3y_N - z_N + 7 = 0 \Leftrightarrow 2 + 3 \times 5 - z + 7 = 0 \Leftrightarrow z = 24$ . Le point N est donc  $N(2; 5; 24)$

Exercice n°16

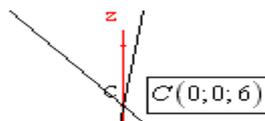
1) Un vecteur normal au plan  $P$  est le vecteur  $\vec{n}(2;1;1)$

2) Notons  $A(x_A; y_A; z_A)$ . Si A appartient à l'axe des abscisses ( $Ox$ ), alors  $y_A = z_A = 0$ . Si de plus A appartient au plan  $P$ , ses coordonnées vérifient l'équation de  $P$ , à savoir  $2x_A + y_A + z_A = 6 \Leftrightarrow 2x_A = 6 \Leftrightarrow x_A = 3$ . Ainsi  $A(3;0;0)$

b) Notons  $B(x_B; y_B; z_B)$ . Si B appartient à l'axe ( $Oy$ ), alors  $x_B = z_B = 0$ . Si de plus B appartient au plan  $P$ , ses coordonnées vérifient l'équation de  $P$ , à savoir  $2x_B + y_B + z_B = 6 \Leftrightarrow y_B = 6$ . Le point B est donc  $B(0;6;0)$

c) Notons  $C(x_C; y_C; z_C)$ . Si C appartient à l'axe ( $Oz$ ), alors  $x_C = y_C = 0$ . Si de plus C appartient au plan  $P$ , ses coordonnées vérifient l'équation de  $P$ , à savoir  $2x_C + y_C + z_C = 6 \Leftrightarrow z_C = 6$ . Le point C est donc  $C(0;0;6)$

3) figure ci après

Exercice n°17

1) On calcule les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 5 \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = -5 \end{cases}$ ,  $\overrightarrow{AC} \begin{cases} x_C - x_A = 4 \\ y_C - y_A = -1 \\ z_C - z_A = -3 \end{cases}$  et  $\overrightarrow{CD} \begin{cases} x_D - x_C = 5 \\ y_D - y_C = -1 \\ z_D - z_C = -5 \end{cases}$

2) a)  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel  $k$  unique satisfaisant aux trois conditions  $\begin{cases} 5k = 4 \\ -k = -1 \\ -5k = -3 \end{cases}$

b) A la lecture de leur coordonnées, on constate que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , donc que  $(AB) \parallel (CD)$

3) a) On calcule :  $2x_A + 5y_A + z_A = 2 \times (-3) + 5 \times 4 + 6 = -6 + 20 + 6 = 20$  puis

$$2x_B + 5y_B + z_B = 2 \times 2 + 5 \times 3 + 1 = 4 + 15 + 1 = 20, \quad 2x_C + 5y_C + z_C = 2 \times 1 + 5 \times 3 + 3 = 2 + 15 + 3 = 20$$

$2x_D + 5y_D + z_D = 2 \times 6 + 5 \times 2 + (-2) = 12 + 10 - 2 = 20$ . Les coordonnées de A, B, C et D vérifient donc cette équation.

b) Si A, B et S sont alignés, alors les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AS}$  sont colinéaires. Il existe donc  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{AS} = t \overrightarrow{AB}$

Notons  $S(x; y; z)$ . Alors  $\overrightarrow{AS} \begin{cases} x_S - x_A = x + 3 \\ y_S - y_A = y - 4 \\ z_S - z_A = z - 6 \end{cases}$ , et de l'égalité  $\overrightarrow{AS} = t \overrightarrow{AB}$  on déduit  $\begin{cases} x + 3 = 5t \\ y - 4 = -t \\ z - 6 = -5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5t - 3 \\ y = -t + 4 \\ z = -5t + 6 \end{cases}$

Mais puisque  $x_S = 7$ , on aura alors  $5t - 3 = 7 \Leftrightarrow t = 2$ . Le point S est donc  $S(7; 2; -4)$

c) Si O, F et P sont alignés, alors les vecteurs  $\overrightarrow{OF}$  et  $\overrightarrow{OP}$  sont colinéaires.

Il existe donc  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OF}$ . Notons  $P(x; y; z)$ .

Alors  $\overrightarrow{OP} \begin{cases} x_P - x_O = x \\ y_P - y_O = y \\ z_P - z_O = z \end{cases}$  et  $\overrightarrow{OF} \begin{cases} x_F - x_O = 1 \\ y_F - y_O = 1 \\ z_F - z_O = 1 \end{cases}$ . De l'égalité  $\overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OF}$  on déduit  $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Mais puisque le point P vérifie l'équation de (E) on doit avoir  $2t + 5t + t = 20 \Leftrightarrow t = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$ . Ainsi  $P\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Exercice n°18

Un vecteur normal au plan  $P_1 : -x + y + 2z - 1 = 0$  est le vecteur  $\vec{n}_1(-1;1;2)$

Un vecteur normal au plan  $P_2 : 3x - y = 0$  est le vecteur  $\vec{n}_2(3;-1;0)$

Un vecteur normal au plan  $P_3 : 2y - 1 = 0$  est le vecteur  $\vec{n}_3(0;2;0)$

Un vecteur normal au plan  $P_4 : 2x - z + 3 = 0$  est le vecteur  $\vec{n}_4(2;0;-1)$

Exercice n°19

1) Si  $\vec{n}(3;2;1)$  est un vecteur normal au plan  $P_1$ , celui-ci a une équation de la forme  $P_1 : 3x + 2y + z + d = 0$

On utilise les coordonnées du point A(2;-3;5) pour déterminer  $d$ .  $3x_A + 2y_A + z_A + d = 0 \Leftrightarrow d = -3x_A - 2y_A - z_A$ , c'est-à-dire  $d = -3 \times 2 - 2 \times (-3) - 5 = -5$ . L'équation de  $P_1$  est donc  $P_1 : 3x + 2y + z - 5 = 0$

2) Si  $\vec{n}(5;3;2)$  est un vecteur normal au plan  $P_2$ , celui-ci a une équation de la forme  $P_2 : 5x + 3y + 2z + d = 0$

On utilise les coordonnées du point A(4;-2;1) pour déterminer  $d$ .  $5x_A + 3y_A + 2z_A + d = 0 \Leftrightarrow d = -5x_A - 3y_A - 2z_A$ , c'est-à-dire  $d = -5 \times 4 - 3 \times (-2) - 2 \times 1 = -16$ . L'équation de  $P_2$  est donc  $P_2 : 5x + 3y + 2z - 16 = 0$

3) Si  $\vec{n}(0;2;1)$  est un vecteur normal au plan  $P_3$ , celui-ci a une équation de la forme  $P_3 : 2y + z + d = 0$

On utilise les coordonnées du point A(1;1;0) pour déterminer  $d$ .  $2y_A + z_A + d = 0 \Leftrightarrow d = -2y_A - z_A$ , c'est-à-dire  $d = -2 \times 1 - 0 = -2$ . L'équation de  $P_3$  est donc  $P_3 : 2y + z - 2 = 0$

Exercice n°20

1) Un vecteur normal au plan  $P$  d'équation :  $2x - 3y + 6z - 18 = 0$  est  $\vec{n}(2;-3;6)$

2) Si le plan  $P'$  est parallèle au plan  $P$ , alors  $\vec{n}(2;-3;6)$  est aussi un vecteur normal à  $P'$  qui aura donc une équation de la forme  $2x - 3y + 6z + d = 0$ . On détermine  $d$  grâce aux coordonnées du point B(6;-4;-4) :

$2x_B - 3y_B + 6z_B + d = 0 \Leftrightarrow d = -2x_B + 3y_B - 6z_B = 0$ . L'équation de  $P'$  est donc  $2x - 3y + 6z = 0$

Exercice n°21

Notons  $A(x; y; z)$ . Si  $\vec{AB}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires, il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{AB} = t\vec{n}$

On calcule  $\vec{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 6 - x \\ y_B - y_A = -4 - y \\ z_B - z_A = -4 - z \end{cases}$  et  $t\vec{n} \begin{cases} 2t \\ -3t \\ 6t \end{cases}$ . De l'égalité  $\vec{AB} = t\vec{n}$ , on déduit  $\begin{cases} 6 - x = 2t \\ -4 - y = -3t \\ -4 - z = 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 3t - 4 \\ z = -4 - 6t \end{cases}$

Mais si A est un point du plan  $P$ , ses coordonnées vérifient l'équation de  $P$ , à savoir  $2x_A - 3y_A + 6z_A - 18 = 0$ , donc

$$2(6 - 2t) - 3(3t - 4) + 6(-4 - 6t) - 18 = 0 \Leftrightarrow -49t = 18 \Leftrightarrow t = -\frac{18}{49}$$

$$\text{Le point A est donc } \begin{cases} x = 6 - 2 \times \left(-\frac{18}{49}\right) = \frac{330}{49} \\ y = 3 \times \left(-\frac{18}{49}\right) - 4 = -\frac{250}{49} \\ z = -4 - 6 \times \left(-\frac{18}{49}\right) = -\frac{88}{49} \end{cases}$$

La distance entre les plans parallèles  $P$  et  $P'$  est donnée par

$$\begin{aligned} AB &= \|\overline{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \\ &= \sqrt{\left(6 - \frac{330}{49}\right)^2 + \left(-4 + \frac{250}{49}\right)^2 + \left(-4 + \frac{88}{49}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1296}{2401} + \frac{2916}{2401} + \frac{11664}{2401}} = \sqrt{\frac{15876}{2401}} = \sqrt{\frac{324}{49}} = \frac{18}{7} \end{aligned}$$

### Exercice n°22

1) Un vecteur normal du plan  $P$  d'équation  $2x + y - z = 5$  est  $\vec{n}_1(2; 1; -1)$ . Un vecteur normal du plan  $P'$  d'équation  $-x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 7$  est  $\vec{n}_2\left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ . Les vecteurs  $\vec{n}_1(2; 1; -1)$  et  $\vec{n}_2\left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$  n'étant pas colinéaires (il n'existe

pas de réel  $k$  unique satisfaisant à la fois 
$$\begin{cases} 2k = -1 \\ 1 \times k = \frac{1}{2} \\ (-1) \times k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
), les deux plans  $P$  et  $P'$  ne sont pas parallèles

2) Un vecteur normal du plan  $P$  d'équation  $x + 3y - 5z = 4$  est  $\vec{n}_1(1; 3; -5)$ . Un vecteur normal du plan  $P'$  d'équation  $-3x - 9y + 15z = -6$  est  $\vec{n}_2(-3; -9; 15)$ . Puisque  $\vec{n}_2 = -3\vec{n}_1$ , les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont colinéaires, donc les deux plans  $P$  et  $P'$  sont parallèles.

3) Un vecteur normal du plan  $P$  d'équation  $x + 3y - 2z = 8$  est  $\vec{n}_1(1; 3; -2)$ . Un vecteur normal du plan  $P'$  d'équation  $-4x - 12y + 8z = -32$  est  $\vec{n}_2(-4; -12; 8)$ . Puisque  $\vec{n}_2 = -4\vec{n}_1$ , les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont colinéaires, donc les deux plans  $P$  et  $P'$  sont parallèles

### Exercice n°23

1) On calcule les coordonnées des vecteurs  $\overline{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = 1 \end{cases}$ ,  $\overline{AC} \begin{cases} x_C - x_A = -2 \\ y_C - y_A = 1 \\ z_C - z_A = 0 \end{cases}$

Les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel  $k$  unique satisfaisant aux trois conditions

$$\begin{cases} k = -2 \\ -k = 1 \\ k = 0 \end{cases} \text{ . Les points A, B et C ne sont donc pas alignés, donc définissent un plan (ABC).}$$

b) Notons  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  les coordonnées d'un vecteur normal à (ABC)

Puisque  $\overline{AB} \cdot \vec{n} = 0$ , on a  $1 \times a + (-1) \times b + 1 \times c = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0$

Puisque  $\overline{AC} \cdot \vec{n} = 0$ , on a  $(-2) \times a + 1 \times b + 0 \times c = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0$

Le système  $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$  de deux équations à trois inconnues admettant une infinité de solutions, on doit « fixer

arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues. L'énoncé nous conseille de choisir  $a=1$

$$\text{Le système devient alors } \begin{cases} a=1 \\ 1-b+c=0 \\ -2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=b-1=1 \\ b=2 \end{cases} . \text{ Un vecteur normal à (ABC) est donc } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

c) Une équation du plan (ABC) est alors  $x+2y+z+d=0$ . On détermine  $d$  en utilisant les coordonnées de l'un des points de ce plan, par exemple  $A(2;1;1)$ . On obtient  $x_A+2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-x_A-2y_A-z_A=-2-2-1=-5$

Une équation du plan (ABC) est alors  $\boxed{x+2y+z-5=0}$ .

2) Une équation de (ABC) étant de la forme  $ax+by+cz=d$ , les coordonnées de A, B et C vérifiant cette équation de plan, nous permettent de dresser le système de trois équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} ax_A+by_A+cz_A+d=0 \\ ax_B+by_B+cz_B+d=0 \\ ax_C+by_C+cz_C+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c+d=0 \\ 3a+2c+d=0 \\ 2b+c+d=0 \end{cases}$$

Ce système admettant une infinité de solutions, on doit « fixer arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues. On fixe par exemple  $a=1$  Le système devient :

$$\begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ 2b+c+d=0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ -c-d=4 & L_4=L_3-2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ c=1 & L_4+L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-c-d=2 & L_1 \\ d=-3-2c=-5 & L_2 \\ c=1 & L_4+L_2 \end{cases}$$

On retrouve alors l'équation  $\boxed{x+2y+z-5=0}$

#### Exercice n°24

1) P et P' admettent pour vecteurs normaux les vecteurs  $\vec{n}_1(\cos t; \sin t; -1)$  et  $\vec{n}_2(\cos t; \sin t; +1)$ .

Le produit scalaire  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (\cos t)(\cos t) + (\sin t)(\sin t) + (-1)(1) = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$  nous permet d'affirmer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

2) l'axe Ox est parallèle à P pour toutes les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $\vec{n}_1(\cos t; \sin t; -1)$ , vecteur normal à P sera orthogonal à tout vecteur directeur de l'axe Ox.

Un vecteur directeur de l'axe Ox est  $\vec{u}(1;0;0)$ . Le produit scalaire  $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = (\cos t) \times 1 + (\sin t) \times 0 + (-1)(0) = \cos t$ . Pour  $t = \frac{\pi}{2}[\pi]$ ,  $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = \cos t = 0$ , donc l'axe Ox est parallèle à P.

3) Les coordonnées des points de la droite intersection des deux plans vérifient le système  $\begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y - z = 0 \\ (\cos t)x + (\sin t)y + z = 0 \end{cases}$ ,

$$\text{soit, par soustraction des deux lignes, } \begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Si  $t = \frac{\pi}{2}[\pi]$ , puisque  $\cos t = 0$  et  $\sin t = 1$ , le système est équivalent à  $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ . Un vecteur directeur de la droite

intersection des deux plans est  $\vec{v}(1;0;0)$

Si  $t \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ ,  $\begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \tan t \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$  Un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans

est  $\vec{v}(-\tan(t); 1; 0)$

4) La distance de  $A(\cos t, \sin t, -3)$  au plan P vaut  $\frac{|(\cos t)(\cos t) + (\sin t)(\sin t) + 3|}{\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2 + (-1)^2}} = \frac{|1+3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$