

## BARYCENTRES – EXERCICES CORRIGES

### Exercice n°1.

Soit A et B deux points distincts. Dans chacun des cas suivants, justifier que le point G défini par l'égalité vectorielle donnée est le barycentre d'un système de points pondérés que l'on précisera

- 1)  $2\overline{GA} + 3\overline{GB} = \vec{0}$                       2)  $\overline{GA} = -5\overline{GB}$                       3)  $\overline{AG} + \frac{1}{5}\overline{AB} = \overline{GB}$

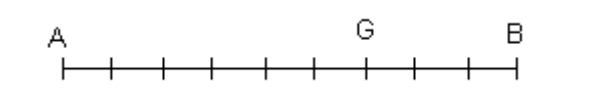
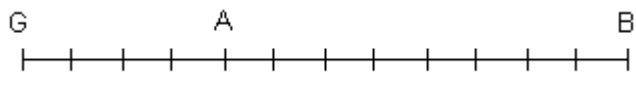
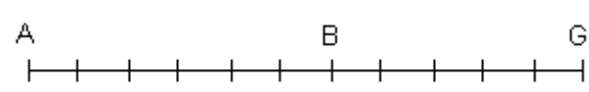
Exercice n°2. Si K est le barycentre d'un système de points pondérés (C,1),(B,-4), exprimer B comme le barycentre des points K et C avec des coefficients à déterminer

### Exercice n°3.

Soit A et B deux points distincts. Construire, s'ils existent, les barycentres des systèmes de points pondérés suivants.

- 1)  $\{(A, -2); (B, 5)\}$                       2)  $\{(A, -3); (B, 3)\}$                       3)  $\left\{ \left( A, \frac{2}{3} \right); \left( B, -\frac{1}{4} \right) \right\}$

Exercice n°4. A partir de chaque figure, déterminer a et b pour que G soit le barycentre du système  $\{(A, a); (B, b)\}$

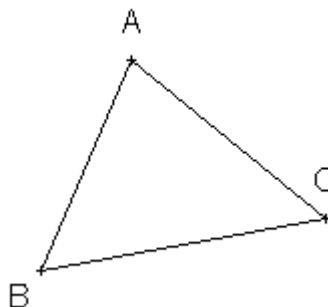
|  |   |
|--|---|
| 1)  | 2)  |
| 3)  |   |

### Exercice n°5.

Le triangle ABC étant donné ci-dessous, construire **le plus précisément possible** les deux barycentres donnés.

$G = \text{Bar} \{(A, 4); (B, 3); (C, -1)\}$

et  $J = \text{Bar} \left\{ \left( A, \frac{1}{6} \right); \left( B, -\frac{1}{12} \right); \left( C, \frac{1}{4} \right) \right\}$



Exercice n°6. Soit ABC est un triangle.

On définit les points H, K, L et G par :

H est le barycentre du système  $\{(A, 3); (B, 2)\}$

K est le barycentre du système  $\{(B, 2); (C, -1)\}$

L est le barycentre du système  $\{(A, 3); (C, -1)\}$

G est le barycentre du système  $\{(H, 5); (C, -1)\}$

1) Démontrer que :  $3\overline{GA} + 2\overline{GB} - \overline{GC} = \vec{0}$

2) En déduire que :

a) G est le milieu du segment [BL]

b) G est le barycentre des points A et K affectés de coefficients que l'on déterminera

### Exercice n°7.

On considère un triangle ABC, I le barycentre des points pondérés (A,2),(C,1), J le barycentre des points pondérés (A,1),(B,2), K le barycentre des points pondérés (C,1),(B,-4).

1) Exprimer B comme le barycentre des points K et C avec des coefficients à déterminer.

2) Déterminez le barycentre de (A,2),(K,3),(C,1).

3) Démontrer que le point J est le milieu de [IK].

4) Soit L le milieu de [CI] et M celui de [KC]. Déterminez a,b,c,d réels pour que L soit le barycentre de (A,a),(C,b) et M celui de (B,c),(C,d).

Exercice n°8.

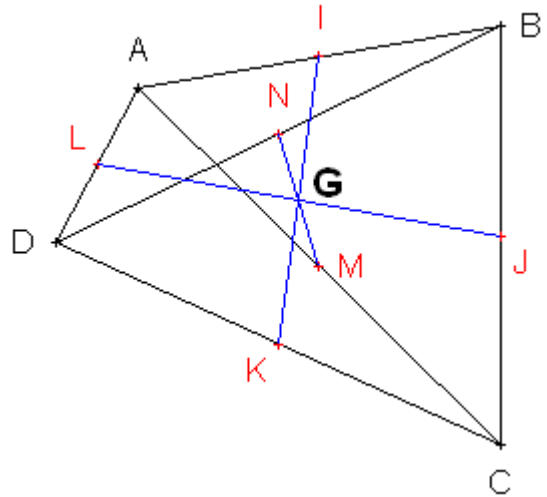
Soit ABCD un quadrilatère.

On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA], [AC] et [BD]

Soit G l'isobarycentre de ABCD.

Démontrer que G est le milieu de [IK], [MN] et [LJ].

Conclure



Exercice n°9.

ABCD est un rectangle tel que  $AB = 6$

1) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_1$  des points M

du plan tels que  $\|2\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|5\vec{MC} - 2\vec{MD}\|$

Démontrer que le milieu de [BC] appartient à  $\Gamma_1$

2) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_2$  des points M du plan tels que  $\|2\vec{MA} + \vec{MB}\| = 2AB$

Démontrer que le point B appartient à  $\Gamma_2$

Exercice n°10.

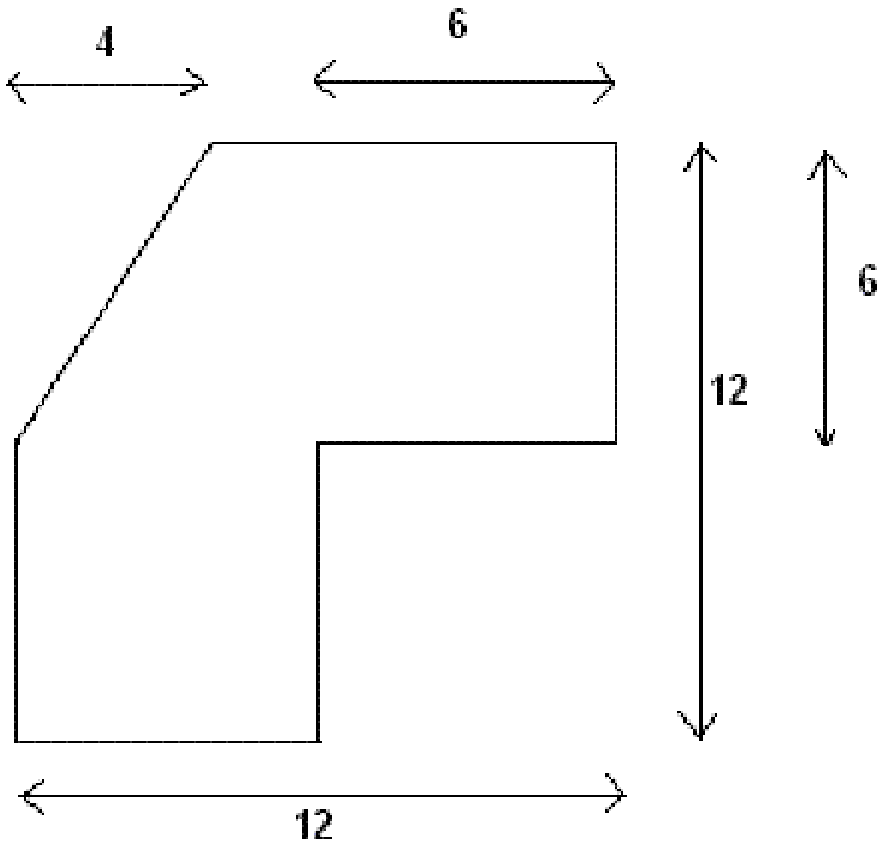
Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-1;2), B(3;1) et C(2;4).

Calculer les coordonnées du barycentre G du système (A;2), (B;-1) et (C;3)

Exercice n°11.

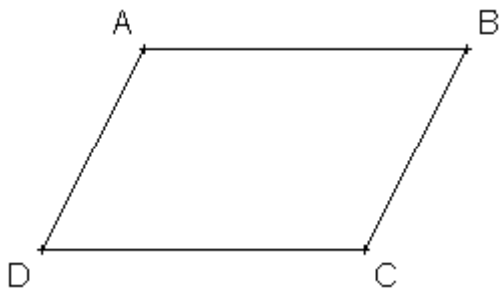
Déterminer et placer le centre d'inertie de la plaque ci-dessous, supposée homogène et d'épaisseur négligeable

On fera apparaître les traits de construction ainsi que les étapes intermédiaires



**Exercices de synthèse :**

Exercice n°12. Soient ABCD un parallélogramme et I le milieu de [AB]. Les droites (DB) et (CI) se coupent en un point noté G (La figure, à compléter, est donnée ci-dessous).



- 1) Montrer que  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- 2) a) Construire le barycentre K du système de points pondérés (A ; 1) , (B ; 1) et (C ; -1)
- b) Montrer que K est aussi le barycentre du système de points pondérés (G ; 3) et (C ; -2)
- 3) a) Dédire de la relation (1) que A est le barycentre des points pondérés (D ; 1) , (G ; 3) et (C ; -2)
- b) Montrer que A est le milieu du segment [DK]
- 4) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :  

$$\|\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$$
- 5) a) Pour quelle(s) valeur(s) du réel  $m$  le barycentre  $I_m$  du système (D ,  $m$ ) , (G ; 3) et (C ; -2) existe-t-il ?
- b) Lorsque  $I_m$  existe, montrer que :  $\overrightarrow{DI_m} = \frac{1}{1+m} \overrightarrow{DK}$
- c) Étudier les variations de la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{1+x}$  et dresser son tableau de variations (on précisera ses limites aux bornes de son domaine de définition sans justification).
- d) En déduire le lieu géométrique du point  $I_m$  lorsque le réel décrit l'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Exercice n°13.

Dans le plan (P), on considère un triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH], telle que AH=BC=4, l'unité choisie étant le centimètre.

- 1) Construire, en justifiant, le point G barycentre du système de points pondérés  $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$
- 2) M est un point quelconque de (P). Montrer que le vecteur  $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$  est un vecteur de norme 8
- 3) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que  $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\vec{V}\|$
- 4) On considère le système de points pondérés  $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$  où  $n$  est un entier naturel fixé.
- a) Montrer que le barycentre  $G_n$  de ce système, existe quelle que soit la valeur de  $n$
- b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  ,  $G_n$  appartient à [AH]
- c) Soit  $\Gamma_n$  l'ensemble des points M du plan tels que  $\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\| = n\|\vec{V}\|$ . Montrer que  $\Gamma_n$  est un cercle contenant le point A, dont on précisera le centre et le rayon
- d) Déterminer la distance  $AG_n$  en fonction de  $n$
- 5) Quel est le comportement de  $G_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

Exercice n°14.

Sur une droite  $D$  munie d'un repère  $(O; \vec{i})$ ,  $A_0$  et  $B_0$  sont les points d'abscisses respectives  $-4$  et  $3$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on note :  $A_{n+1}$  le barycentre de  $(A_n, 1)$  et  $(B_n, 4)$  ;  $B_{n+1}$  le barycentre de  $(A_n, 3)$  et  $(B_n, 2)$  ;

- 1) Placer les points  $A_0, B_0, A_1, B_1$
- 2) Les points  $A_n$  et  $B_n$  ont pour abscisses respectives  $a_n$  et  $b_n$ . Ainsi  $a_0 = -4$  et  $b_0 = 3$

Démontrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$  et  $b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$

- 3) a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :  $3a_n + 4b_n = 0$

b) En déduire que :  $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$  et  $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$

4) a) Exprimer  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .

b) Déterminer les limites de  $a_n$  et  $b_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$

c) Interpréter ce résultat à l'aide des points  $A_n$  et  $B_n$ .

## BARYCENTRES - CORRECTION

### Exercice n°1

1) L'égalité vectorielle  $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$  traduit exactement le fait que G est le barycentre du système  $\{(A,2);(B,3)\}$  (c'est la définition !)

2) L'égalité vectorielle  $\overrightarrow{GA} = -5\overrightarrow{GB}$  est équivalente à  $\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$  qui traduit exactement le fait que G est le barycentre du système  $\{(A,1);(B,5)\}$

3) L'égalité vectorielle  $\overrightarrow{AG} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$  se transforme successivement en :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{GB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \frac{1}{5}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) - \overrightarrow{GB} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{5}\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{6}{5}\overrightarrow{AG} - \frac{4}{5}\overrightarrow{GB} &= \vec{0} \Leftrightarrow 5\left(\frac{6}{5}\overrightarrow{AG} - \frac{4}{5}\overrightarrow{GB}\right) = 5 \times \vec{0} \\ \Leftrightarrow 6\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{GB} &= \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(6\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{GB}) = \frac{1}{2}\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \end{aligned}$$

qui traduit exactement le fait que G est le barycentre du système  $\{(A,-3);(B,-2)\}$

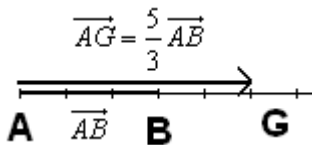
Exercice n°2 Si K est le barycentre d'un système de points pondérés (C,1),(B,-4), alors on peut écrire :

$\overrightarrow{KC} - 4\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ , qui traduit le fait que B est le barycentre du système  $\{(K,3);(C,1)\}$

Exercice n°3 1) G barycentre de  $\{(A,-2);(B,5)\}$  signifie que :

$$\begin{aligned} -2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA} + 5(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) &= \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} = -5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

D'où une construction du point G :



### 2<sup>ème</sup> méthode :

Si on sait que lorsque G est le barycentre d'un système  $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$  (avec  $\alpha + \beta \neq 0$ ), alors  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$ , on peut

écrire directement que G barycentre de  $\{(A,-2);(B,5)\}$  signifie  $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{-2+5}\overrightarrow{AB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$  (on retrouve le même résultat !)

2) Dans le deuxième cas, la somme des coefficients étant nulle, le barycentre du système  $\{(A,-3);(B,3)\}$  **n'existe pas**. Inutile d'essayer de le construire !

3) Pour construire le barycentre du système de points pondérés  $\left\{\left(A, \frac{2}{3}\right); \left(B, -\frac{1}{4}\right)\right\}$ , on commence par multiplier les deux coefficients par 12 car l'égalité  $\frac{2}{3}\overrightarrow{GA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$  est équivalente à  $12\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{GA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{GB}\right) = 12 \times \vec{0} \Leftrightarrow 8\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

(De manière générale on peut multiplier tous les coefficients du système par un même réel non nul).

Ceci supprime les fractions, et rend le calcul vectoriel ou l'application de la formule  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$  plus aisée.

On trouve finalement  $\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ , ce qui nous permet de construire le point G :



Exercice n°4

**Figure 1 :**

1<sup>ère</sup> méthode : Sur la figure 1) on « lit » que  $\overrightarrow{AG} = \frac{6}{9}\overrightarrow{AB}$ , égalité vectorielle que l'on transforme successivement en :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} = \frac{6}{9}\overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} - 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \end{aligned}$$

qui traduit le fait que G est le barycentre du système  $\{(A,1);(B,2)\}$

2<sup>ème</sup> méthode : Si on sait que lorsque G est le barycentre d'un système  $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$  (avec  $\alpha + \beta \neq 0$ ), alors

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}, \text{ on identifie sans difficulté, à partir de l'égalité } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{AB} \text{ les coefficients } \alpha = 1 \text{ et } \beta = 2.$$

**Figure 2 :** Sur la figure 2) on « lit » que  $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Ou on procède par identification, en remarquant que  $\overrightarrow{AG} = \frac{-1}{3+(-1)}\overrightarrow{AB}$ , d'où  $\alpha = 3$  et  $\beta = -1$ ,

ou on « se lance » dans les égalités vectorielles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \end{aligned}$$

donc G est le barycentre du système  $\{(A,-3);(B,1)\}$  ou encore du système  $\{(A,(-3)\times(-1));(B,1\times(-1))\}$ , c'est-à-dire du système  $\{(A,3);(B,-1)\}$  (car on peut multiplier tous les coefficients du système par un même réel non nul).

On retrouve bien le même résultat

**Figure 3 :** L'observation de la figure 3) conduit à remarquer que on « lit » que  $\overrightarrow{AG} = \frac{11}{6}\overrightarrow{AB}$

Par identification,  $\overrightarrow{AG} = \frac{11}{-5+11}\overrightarrow{AB}$ , donc  $\alpha = -5$  et  $\beta = 11$ .

Par égalités vectorielles,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} = \frac{11}{6}\overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AG} - 11\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{AG} - 11\overrightarrow{AG} - 11\overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow -5\overrightarrow{AG} - 11\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA} - 11\overrightarrow{GB} = \vec{0} \end{aligned}$$

donc G est le barycentre du système  $\{(A,5);(B,-11)\}$  ou encore du système  $\{(A,-5);(B,11)\}$ ,

Exercice n°5

Pour construire le barycentre d'un système de trois points pondérés, il faut regrouper deux d'entre eux au sein d'un « système partiel », en construire le « barycentre partiel », puis remplacer ce système par son barycentre affecté de la somme des coefficients. Autrement dit,

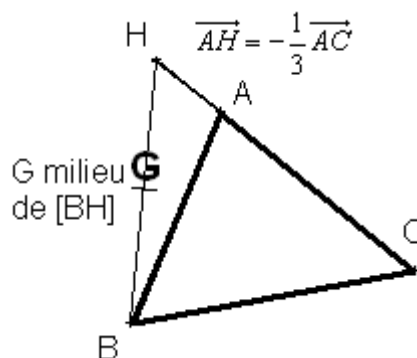
1) Soit  $G = \text{Bar}\{(A,4);(B,3);(C,-1)\}$  le point à construire.

Si on note  $H = \text{Bar}\{(A,4);(C,-1)\}$ , qui est défini par  $\overrightarrow{AH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$  (construction ci-dessous), alors :

$$\begin{aligned} G &= \text{Bar}\{(A,4);(B,3);(C,-1)\} \\ &= \text{Bar}\{(H,4-1);(B,3)\} \\ &= \text{Bar}\{(H,3);(B,3)\} \\ &= \text{Bar}\{(H,1);(B,1)\} \end{aligned}$$

c'est-à-dire G milieu de [HB].

On a ainsi construit le point G grâce au barycentre partiel H



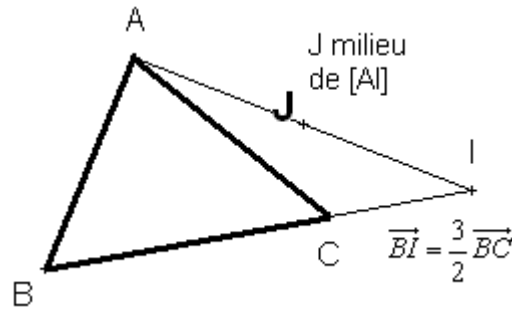
2) Pour construire le barycentre  $J = \text{Bar}\left\{\left(A, \frac{1}{6}\right); \left(B, -\frac{1}{12}\right); \left(C, \frac{1}{4}\right)\right\}$ , on commence par multiplier tous les coefficients par 12 :  $J = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, 3)\}$ . On regroupe les deux derniers points en posant  $I = \text{Bar}\{(B, -1); (C, 3)\}$ , c'est-à-dire  $\overline{BI} = \frac{3}{2}\overline{BC}$  (construction ci-contre),

Ensuite, il vient

$$J = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, 3)\}$$

$$= \text{Bar}\{(A, 2); (I, 2)\} = \text{Bar}\{(A, 1); (I, 1)\}$$

donc J est le milieu de [AI]



### Exercice n°6

Si H est le barycentre du système  $\{(A, 3); (B, 2)\}$ , alors  $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AB}$

Si K est le barycentre du système  $\{(B, 2); (C, -1)\}$ , alors  $\overline{BK} = -\overline{BC}$

Si L est le barycentre du système  $\{(A, 3); (C, -1)\}$ , alors  $\overline{AL} = -\frac{1}{2}\overline{AC}$

Si G est le barycentre du système  $\{(H, 5); (C, -1)\}$ , alors  $\overline{HG} = -\frac{1}{4}\overline{HC}$

1) Pour montrer que  $3\overline{GA} + 2\overline{GB} - \overline{GC} = \vec{0}$ , deux méthodes (au moins !) sont possibles :

1<sup>ère</sup> méthode : « calculs vectoriels » :

$$3\overline{GA} + 2\overline{GB} - \overline{GC}$$

$$= 3(\overline{GH} + \overline{HA}) + 2(\overline{GH} + \overline{HB}) - (\overline{GH} + \overline{HC})$$

$$= \underbrace{3\overline{GH} + 2\overline{GH} - \overline{GH}}_{4\overline{GH}} + \underbrace{3\overline{HA} + 2\overline{HB}}_0 - \overline{HC}$$

car  $H = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}$

$$= 4\overline{GH} - \overline{HC}$$

$$= \vec{0} \text{ car } \overline{HG} = -\frac{1}{4}\overline{HC} \Leftrightarrow \overline{GH} = \frac{1}{4}\overline{HC}$$

2<sup>ème</sup> méthode : En utilisant la technique dite des « barycentres partiels », on écrit :

$$G = \text{Bar}\left\{\underbrace{(H, 5)}_{\text{car}}; (C, -1)\right\}$$

$$= \text{Bar}\left\{\underbrace{H = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}}_{(A, 3); (B, 2)}; (C, -1)\right\}$$

ce qui permet de conclure directement que  $3\overline{GA} + 2\overline{GB} - \overline{GC} = \vec{0}$  (c'est la définition !)

2) Puisque L est le barycentre du système  $\{(A, 3); (C, -1)\}$ , on écrit

$$G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2); (C, -1)\}$$

$$= \text{Bar}\{(L, 3-1); (B, 2)\}$$

$$= \text{Bar}\{(L, 2); (B, 2)\} = \text{Bar}\{(L, 1); (B, 1)\}$$

donc G est le milieu du segment [BL]

b) Puisque K est le barycentre du système  $\{(B, 2); (C, -1)\}$ , on écrit :

$$G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2); (C, -1)\} = \text{Bar}\{(A, 3); (K, 2-1)\}, \text{ c'est-à-dire } G = \text{Bar}\{(A, 3); (K, 1)\}$$

Exercice n°7

1) Si K est le barycentre d'un système de points pondérés (C,1),(B,-4), alors on peut écrire :

$$\overline{KC} - 4\overline{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{KB} + \overline{BC} - 4\overline{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overline{KB} + \overline{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overline{BK} + \overline{BC} = \vec{0}, \text{ qui traduit le fait que B est le barycentre du système } \{(K,3);(C,1)\}$$

2) En utilisant le barycentre partiel B du système  $\{(K,3);(C,1)\}$ , on écrit :

$$\text{Bar}\{(A,2);(K,3);(C,1)\} = \text{Bar}\{(A,2);(B,3+1)\} = \text{Bar}\{(A,2);(B,4)\} = \text{Bar}\{(A,1);(B,2)\}$$

Le barycentre cherché est donc le point J

3) Puisque  $J = \text{Bar}\{(A,2);(K,3);(C,1)\}$ , en utilisant le fait que I le barycentre des points pondérés (A,2),(C,1), on écrit

$$J = \text{Bar}\{(I,2+1);(K,3)\} = \text{Bar}\{(I,3);(K,3)\} = \text{Bar}\{(I,1);(K,1)\} \text{ donc J est le milieu de [IK].}$$

4) En utilisant la technique des « barycentres partiels », on écrit : Si L est le milieu de [CI], alors

$$\begin{aligned} L = \text{Bar}\{(I,1);(C,1)\} &= \text{Bar}\left\{ \underbrace{(I,3)}_{\text{d'après l'énoncé}} ; (C,3) \right\} \\ &= \text{Bar}\left\{ \underbrace{(A,2);(C,1)}_{I = \text{Bar}\{(A,2);(C,1)\}} ; (C,3) \right\} = \text{Bar}\{(A,2);(C,4)\} = \text{Bar}\{(A,1);(C,2)\} \end{aligned}$$

donc  $a = 1$  et  $b = 2$ . De la même manière,

$$\begin{aligned} L = \text{Bar}\{(K,1);(C,1)\} &= \text{Bar}\left\{ \underbrace{(K,-3)}_{\text{d'après l'énoncé}} ; (C,-3) \right\} \\ &= \text{Bar}\left\{ \underbrace{(C,1);(B,-4)}_{K = \text{Bar}\{(C,1);(B,-4)\}} ; (C,-3) \right\} = \text{Bar}\{(B,-4);(C,-2)\} = \text{Bar}\{(B,2);(C,1)\} \end{aligned}$$

$c = 2$  et  $d = 1$

Exercice n°8

Puisque I est le milieu de [AB], alors  $I = \text{Bar}\{(A,1);(B,1)\}$

Puisque J est le milieu de [BC], alors  $J = \text{Bar}\{(B,1);(C,1)\}$

Puisque K est le milieu de [CD], alors  $K = \text{Bar}\{(C,1);(D,1)\}$

Puisque L est le milieu de [DA], alors  $L = \text{Bar}\{(A,1);(D,1)\}$

Puisque M est le milieu de [AC], alors  $M = \text{Bar}\{(A,1);(C,1)\}$

Puisque N est le milieu de [BD], alors  $N = \text{Bar}\{(B,1);(D,1)\}$

Notons  $G = \text{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$

En effectuant deux regroupements de barycentres partiels, on écrit :

$$\begin{aligned} G &= \text{Bar}\left\{ \underbrace{(A,1);(B,1)}_{I = \text{Bar}\{(A,1);(B,1)\}} ; \underbrace{(C,1);(D,1)}_{K = \text{Bar}\{(C,1);(D,1)\}} \right\} \\ &= \text{Bar}\{(I,2) ; (K,2)\} = \text{Bar}\{(I,1);(K,1)\} \end{aligned}$$

donc G est le milieu de [IK].

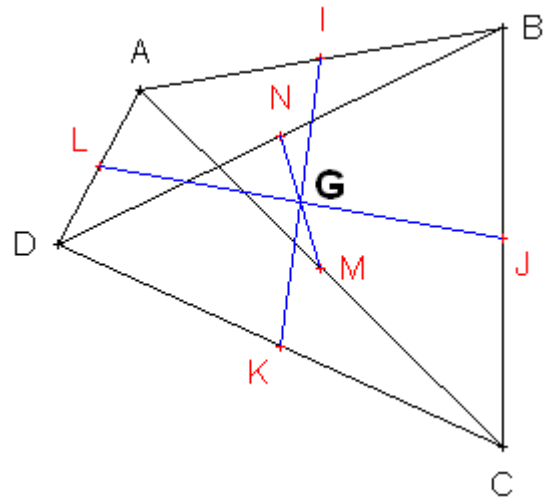
En effectuant un deuxième regroupement, à l'aide de  $M = \text{Bar}\{(A,1);(C,1)\}$  et  $N = \text{Bar}\{(B,1);(D,1)\}$ , on écrit que

$$G = \text{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\} = \text{Bar}\{(M,2);(N,2)\} = \text{Bar}\{(M,1);(N,1)\}, \text{ donc que G est le milieu de [MN].}$$

Enfin, à l'aide du regroupement  $J = \text{Bar}\{(B,1);(C,1)\}$  et  $L = \text{Bar}\{(A,1);(D,1)\}$ , on écrit

$$G = \text{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\} = \text{Bar}\{(J,2);(L,2)\} = \text{Bar}\{(J,1);(L,1)\}, \text{ donc G est le milieu de [JL].}$$

Les trois segments [IK], [MN] et [LJ] sont donc concourants en leur milieu commun G.





Exercice n°9

1) Si on note G le barycentre  $G = \text{Bar}\{(A,2);(B,1)\}$  (donc  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ) et H le barycentre  $H = \text{Bar}\{(C,5);(D,-2)\}$  (donc  $\overrightarrow{CH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ ), alors pour tout point M du plan, on a

$$\begin{aligned} & 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \\ &= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} \\ &= 3\overrightarrow{MG} + \underbrace{2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}}_{\vec{0} \text{ car } G = \text{Bar}\{(A,2);(B,1)\}} = 3\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

et de même, pour tout point M du plan,

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} &= 5(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC}) - 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HD}) \\ &= 3\overrightarrow{MH} + 5\overrightarrow{HC} - 2\overrightarrow{HD} = 3\overrightarrow{MH} + \vec{0} \end{aligned}$$

L'égalité  $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\|$  devient alors équivalente à  $\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MH}\|$ , donc à  $3MG = 3MH \Leftrightarrow GM = HM$

Le point M est donc équidistant des points G et H, donc appartient à la médiatrice du segment [GH].

$\Gamma_1$  est donc la médiatrice de [GH] (en bleu sur le dessin)

Notons I le milieu de [GH].

Alors  $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{IC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{IC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$  car  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$  puisque ABCD est un rectangle. D'autre part  $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{IC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ . On en déduit donc que  $\overrightarrow{IH} = -\overrightarrow{IG}$ , donc que I est le milieu de [GH], donc que I appartient bien à la médiatrice  $\Gamma_1$  de [GH]

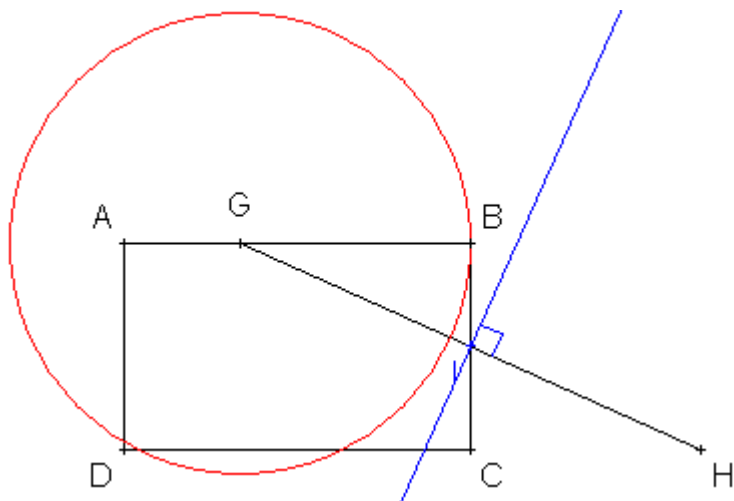
2) On utilise de nouveau le point  $G = \text{Bar}\{(A,2);(B,1)\}$  pour écrire l'équivalence :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 2AB \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = 12 \Leftrightarrow 3GM = 12 \Leftrightarrow GM = 4$$

M appartient donc au cercle de centre G et de rayon 4.

$\Gamma_2$  est donc le cercle de centre G et de rayon 4 (en rouge sur le dessin)

Puisque  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ , on en déduit que  $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  donc  $\|\overrightarrow{GB}\| = \left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right\| \Leftrightarrow BG = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ , donc M appartient donc au cercle  $\Gamma_2$  de centre G et de rayon 4.



Exercice n°10 - Deux méthodes équivalentes sont envisageables :

1<sup>ère</sup> méthode :

L'application des formules du cours :  $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$  et  $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ ,

Qui se traduisent ici par  $x_G = \frac{2 \times (-1) - 3 + 3 \times 2}{2 - 1 + 3} = \frac{1}{4}$  et  $y_G = \frac{2 \times 2 - 1 + 3 \times 4}{2 - 1 + 3} = \frac{15}{4}$

2<sup>ème</sup> méthode : Le retour à la définition générale :

Le point G barycentre du système (A;2), (B;-1) et (C;3) vérifie donc  $2\overline{GA} - \overline{GB} + 3\overline{GC} = \vec{0}$ .

Si on note  $G(x_G; y_G)$ , on exprime en fonction de  $x_G$  et  $y_G$  les coordonnées des vecteurs :

$$\overline{GA} \begin{cases} x_A - x_G = -1 - x_G \\ y_A - y_G = 2 - y_G \end{cases} \text{ donc } 2\overline{GA} \begin{cases} 2(-1 - x_G) = -2 - 2x_G \\ 2(2 - y_G) = 4 - 2y_G \end{cases}; \quad \overline{GB} \begin{cases} x_B - x_G = 3 - x_G \\ y_B - y_G = 1 - y_G \end{cases} \text{ donc } -\overline{GB} \begin{cases} -(3 - x_G) = x_G - 3 \\ -(1 - y_G) = y_G - 1 \end{cases}$$

$$\overline{GC} \begin{cases} x_C - x_G = 2 - x_G \\ y_C - y_G = 4 - y_G \end{cases} \text{ donc } 3\overline{GC} \begin{cases} 3(2 - x_G) = 6 - 3x_G \\ 3(4 - y_G) = 12 - 3y_G \end{cases}$$

On arrive ainsi aux coordonnées de  $2\overline{GA} - \overline{GB} + 3\overline{GC}$  :

$$2\overline{GA} - \overline{GB} + 3\overline{GC} \begin{cases} -2 - 2x_G + x_G - 3 + 6 - 3x_G = -4x_G + 1 \\ 4 - 2y_G + y_G - 1 + 12 - 3y_G = -4y_G + 15 \end{cases}$$

Puisque  $2\overline{GA} - \overline{GB} + 3\overline{GC} = \vec{0}$ , et que le vecteur nul possède deux coordonnées... nulles !, on obtient les deux équations

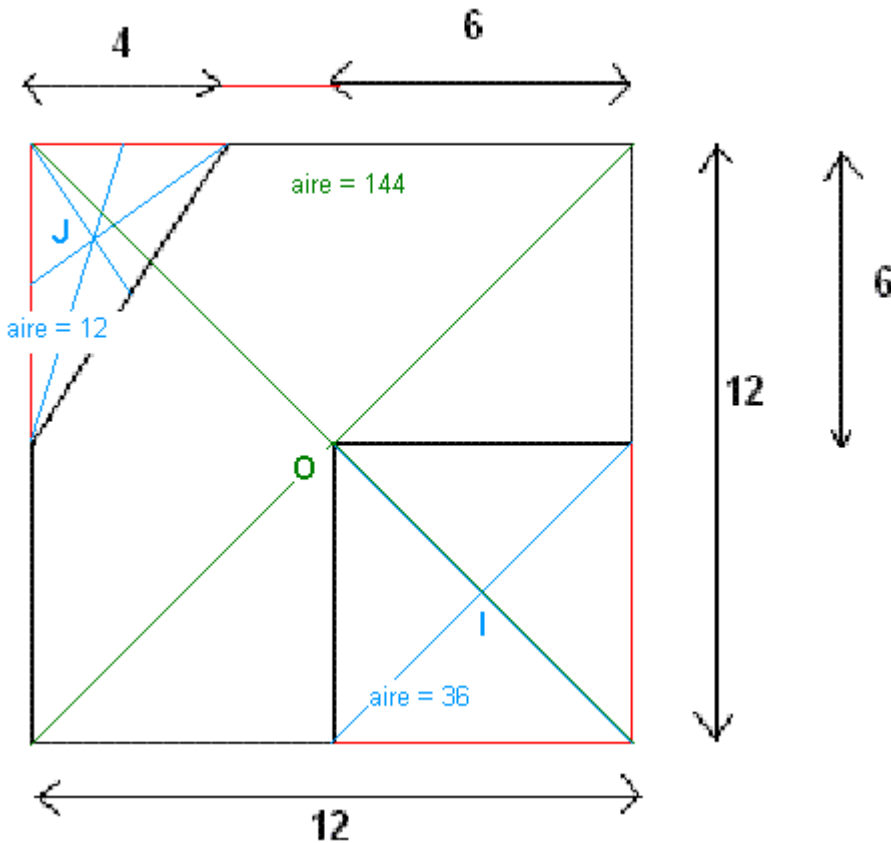
$$-4x_G + 1 = 0 \text{ et } -4y_G + 15 = 0 \text{ grâce auxquelles on retrouve bien } x_G = \frac{1}{4} \text{ et } y_G = \frac{15}{4}$$

### Exercice n°11

Deux « zones » ont évidé le « grand carré » d'aire 144 unités d'aire, de centre de gravité O (intersection des diagonales en vert) :

- Un triangle d'aire  $\frac{4 \times 6}{2} = 12$  unités d'aires, de centre de gravité J (intersection des médianes en bleu)

- Un « petit carré » d'aire 36 unités d'aires, de centre de gravité I (intersection des diagonales en bleu)

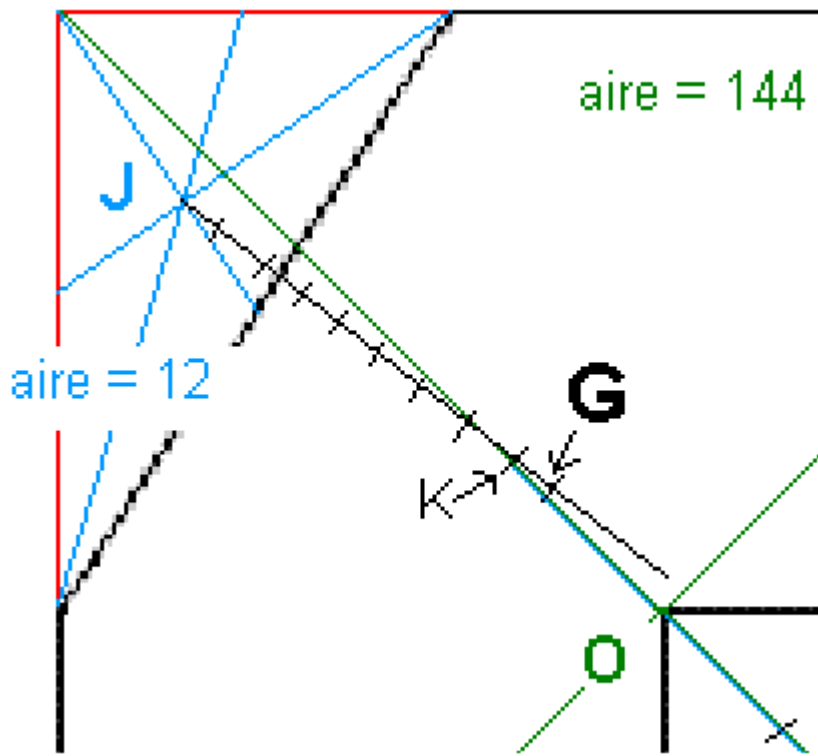


Le centre de gravité « global » sera le point G barycentre :

$$G = \text{Bar}\{(O, 144); (J, -12); (I, -36)\} = \text{Bar}\{(O, 12); (J, -1); (I, -3)\}$$

En introduisant le barycentre partiel  $K = \text{Bar}\{(O, 12); (I, -3)\} = \text{Bar}\{(O, 4); (I, -1)\} \Leftrightarrow \overline{OK} = -\frac{1}{3}\overline{OI}$  (construction : figure

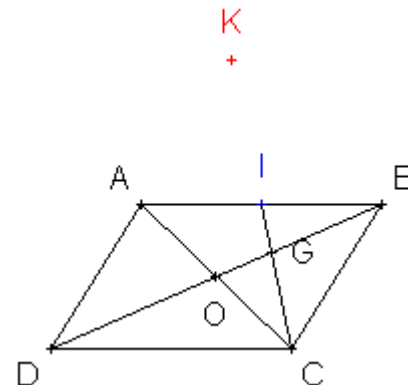
ci-dessous), on se retrouve avec  $G = \text{Bar}\{(J, -1); (K, 9)\} \Leftrightarrow \overline{JG} = \frac{9}{8}\overline{JK}$



**Exercices de synthèse :**

Exercice n°12

1) Si on note O l'intersection des diagonales du parallélogramme, O est le milieu de [AC]. Le segment [BD] (ou [BO]) est donc, dans le triangle ABC, la médiane issue de B. De même, le segment [BI] est la médiane issue de C, puisque I est le milieu de [AB]. Le point G intersection de (DB) et (CI) est donc le centre de gravité (ou encore isobarycentre) du triangle ABC. Il vérifie donc  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$



2) a) En regroupant les points A et B par l'intermédiaire de leur milieu I, on écrit :

$K = \text{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,-1)\} = \text{Bar}\{(I,2);(C,-1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{IC}$ , on en déduit que I est le milieu de [KC], d'où la construction du point K (en rouge) :

b) En utilisant la décomposition  $G = \text{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$ , puis en regroupant les coefficients du point C, on obtient :

$$\text{Bar}\{(G,3);(C,-2)\} = \text{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,1);(C,-2)\} = \text{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,1-2)\} = \text{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,-1)\} = K$$

3) On écrit

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$   
car ABCD  
est un  
parallélogramme

On en déduit  $-3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ , ou encore, en multipliant par  $-1$  :  $3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$  donc A est le barycentre des points pondérés (D ; 1), (G ; 3) et (C ; -2)

b) Puisque  $A = \text{Bar}\{(D,1);(G,3);(C,-2)\}$ , et puisque  $K = \text{Bar}\{(G,3);(C,-2)\}$  (question 2b), on en déduit que  $A = \text{Bar}\{(D,1);(K,3-2)\} = \text{Bar}\{(D,1);(K,1)\}$  donc A est le milieu du segment [DK]

4) En utilisant les barycentres  $A = \text{Bar}\{(D,1);(G,3);(C,-2)\}$  et  $I = \text{Bar}\{(A,1);(B,1)\}$  milieu de [AB], on écrit l'équivalence  $\|\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MA}\| = \|2\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow AM = IM$ .

M appartient donc à la médiatrice du segment [AI]

5) a) Le barycentre du système (D, m), (G ; 3) et (C ; -2) existe si et seulement si la somme des coefficients du système est non nulle, c'est-à-dire si et seulement si  $1 + m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ . Le barycentre du système (D, m), (G ; 3) et (C ; -2) existe donc pour tout  $m \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$

b) Pour tout  $m \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$ , si on note  $I_m = \text{Bar}\{(D,m);(G,3);(C,-2)\}$ , on a donc

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{I_m D} + 3\overrightarrow{I_m G} - 2\overrightarrow{I_m C} = \vec{0} &\Leftrightarrow m\overrightarrow{I_m D} + 3(\overrightarrow{I_m D} + \overrightarrow{DG}) - 2(\overrightarrow{I_m D} + \overrightarrow{DC}) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow (m+1)\overrightarrow{I_m D} + 3\overrightarrow{DG} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} &\Leftrightarrow (m+1)\overrightarrow{I_m D} + 3(\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KG}) - 2(\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KC}) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow (m+1)\overrightarrow{I_m D} + \overrightarrow{DK} + \underbrace{3\overrightarrow{KG} - 2\overrightarrow{KC}}_0 = \vec{0} \end{aligned}$$

Ainsi  $(m+1)\overrightarrow{I_m D} = -\overrightarrow{DK} \Leftrightarrow \overrightarrow{DI_m} = \frac{1}{m+1}\overrightarrow{DK}$

c) Si on note  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ , défini sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , on calcule  $f(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} < 0$  donc f est strictement décroissante sur

$]-\infty; -1[$  et sur  $]-1; +\infty[$ . De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$ .

D'où le tableau de variations :

|                        |   |      |   |
|------------------------|---|------|---|
| $x$                    | $-\infty$   | $-1$ | $+\infty$   |
| $f(x) = \frac{1}{1+x}$ | $\begin{array}{c} \square \\ \searrow \\ -\infty \end{array}$ |      | $\begin{array}{c} +\infty \\ \searrow \\ \square \end{array}$ |

d) D'après le tableau de variations, l'image de l'ensemble  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$  est l'ensemble  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ . Ainsi le coefficient de colinéarité  $\frac{1}{m+1}$  existant entre  $\overrightarrow{DI_m}$  et  $\overrightarrow{DK}$  parcourant tout l'ensemble  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ , le point  $I_m$  parcourt toute la droite (DK), sauf le point D

Exercice n°13

Dans le plan (P), on considère un triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH], telle que AH=BC=4, l'unité choisie étant le centimètre.

1) On introduit le milieu H de [BC] (puisque dans un triangle isocèle en A, la hauteur issue de A est aussi médiane issue de A), pour conclure que  $G = \text{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,1)\} = \text{Bar}\{(A,2);(H,2)\} = \text{Bar}\{(A,1);(H,1)\}$  est le milieu de [AH].

2) Pour tout point M,

$$\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = 2\vec{MA} - (\vec{MA} + \vec{AB}) - (\vec{MA} + \vec{AC}) = 2\vec{MA} - \vec{MA} - \vec{MA} - \vec{AB} - \vec{AC} = -(\vec{AB} + \vec{AC}) = -2\vec{AH}$$

donc  $\|\vec{V}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|-2\vec{AH}\| = 2AH = 8$

3) En utilisant le barycentre  $G = \text{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$ , on écrit l'équivalence :

$$\|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{V}\| \Leftrightarrow \|4\vec{MG}\| = 8 \Leftrightarrow GM = 2. \text{ M parcourt donc le cercle de centre G et de rayon 2}$$

4) a) Le barycentre  $G_n$  du système de points pondérés  $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$  existe quel que soit l'entier naturel n car la somme des coefficients vaut  $2+n$  qui ne s'annule pas si n est un entier naturel

b) En introduisant le milieu H de [BC], on écrit  $G_n = \text{Bar}\{(A,2);(B,n);(C,n)\} = \text{Bar}\{(A,2);(H,2n)\}$  donc

$\vec{AG}_n = \frac{2n}{2+2n} \vec{AH} = \frac{n}{1+n} \vec{AH}$ . Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{n}{1+n} < 1$ , le coefficient de colinéarité entre  $\vec{AG}_n$  et  $\vec{AH}$  étant un réel compris entre 0 et 1, on peut affirmer que  $G_n$  appartient au segment [AH].

c) En introduisant le barycentre  $G_n = \text{Bar}\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$ , on écrit l'équivalence :

$$\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{V}\| \Leftrightarrow \|(2+2n)\vec{MG}_n\| = 8n \Leftrightarrow G_nM = \frac{8n}{2+2n} = \frac{4n}{1+n}.$$

Le point M parcourt donc le cercle  $\Gamma_n$  de centre  $G_n$  et de rayon  $\frac{4n}{1+n}$ .

Le point A appartient à  $\Gamma_n$  car l'égalité  $\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{V}\|$  est vérifiée si on remplace M par A.

En effet d'une part  $\|2\vec{AA} + n\vec{AB} + n\vec{AC}\| = \|n(\vec{AB} + \vec{AC})\| = n\|\vec{AB} + \vec{AC}\| = n\|2\vec{AH}\| = 8n$ , et d'autre part  $n\|\vec{V}\| = 8n$ .

D'où l'égalité, qui prouve que le point A appartient à  $\Gamma_n$ .

d) L'égalité  $\vec{AG}_n = \frac{n}{1+n} \vec{AH}$  implique que  $AG_n = \frac{4n}{1+n}$

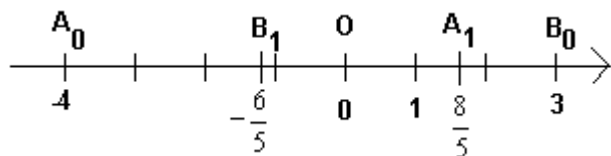
5)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} AG_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{1+n} = 4$  et  $G_n$  appartenant au segment [AH] nous permettent de conclure que lorsque n tend vers  $+\infty$ , le point  $G_n$  se rapproche indéfiniment (tend vers) du point H.

Exercice n°14

1)  $A_1$  le barycentre de  $(A_0,1)$  et  $(B_0,4)$ , donc  $a_1 = \frac{1a_0 + 4b_0}{5} = \frac{8}{5}$

$B_1$  le barycentre de  $(A_0,3)$  et  $(B_0,2)$ , donc  $b_1 = \frac{3a_0 + 2b_0}{5} = -\frac{6}{5}$

On obtient donc :



2)  $A_{n+1}$  est le barycentre de  $(A_n,1)$  et  $(B_n,4)$  donc  $a_{n+1} = \frac{a_n + 4b_n}{5} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$

$B_{n+1}$  est le barycentre de  $(A_n,3)$  et  $(B_n,2)$  donc  $b_{n+1} = \frac{3a_n + 2b_n}{5} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$

3) a) Initialisation : On vérifie que :  $3a_0 + 4b_0 = 3 \times (-4) + 4 \times 3 = 0$

Hérédité : On considère que pour un entier naturel n,  $3a_n + 4b_n = 0$

On calcule alors :

$$3a_{n+1} + 4b_{n+1} = 3 \times \frac{1}{5}(a_n + 4b_n) + 4 \times \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) = \frac{3a_n + 12b_n + 12a_n + 8b_n}{5} = \frac{15a_n + 20b_n}{5} = 3a_n + 4b_n$$

Or  $3a_n + 4b_n = 0$  d'après l'hypothèse de récurrence.

Conclusion :

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $3a_n + 4b_n = 0$

b) Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $3a_n + 4b_n = 0$ , alors  $b_n = -\frac{3}{4}a_n$  et  $a_n = -\frac{4}{3}b_n$ .

Ainsi, l'égalité  $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$  devient  $a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n + 4 \times \left(-\frac{3}{4}a_n\right)\right) = \frac{1}{5}(a_n - 3a_n) = -\frac{2}{5}a_n$

L'égalité  $b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$  devient  $b_{n+1} = \frac{1}{5}\left(3 \times \left(-\frac{4}{3}b_n\right) + 2b_n\right) = \frac{1}{5}(-4b_n + 2b_n) = -\frac{2}{5}b_n$

4) a) La suite  $a$  est donc géométrique de raison  $-\frac{2}{5}$  et de premier terme  $a_0 = -4$ . Ainsi, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = a_0 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n = -4 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n.$$

De même, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n = 3 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n$ .

b) La raison des suites géométriques  $a$  et  $b$  appartient à l'intervalle  $] -1 ; 1[$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$

c) Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , les points  $A_n$  et  $B_n$  se rapprochent aussi près que l'on veut de l'origine  $O$  de la droite graduée.