

Exercices

TD : Structures algébriques (partie 2)

Groupe anneau corps

Exercice 1: on pose $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall (x; y) \in I^2$

On muni I de la loi de composition définie par :

$$x * y = \arctan(-1 + \tan x + \tan y)$$

Montrer que $(I; *)$ est un groupe commutatif

Exercice 2: on muni \mathbb{R}^2 d'une loi de composition interne T défini par :

$$(x; y) T (x'; y') = (x + x'; ye^{x'} + y'e^{-x})$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (x'; y') \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2; T)$ groupe non commutative

Exercice 3: soit $(G; \cdot)$ un groupe noté

multiplicativement et tel que : $(a; b) \in G^2$

$$(ab)^2 = a^2 b^2 \text{ Montrer que ce groupe est}$$

commutatif

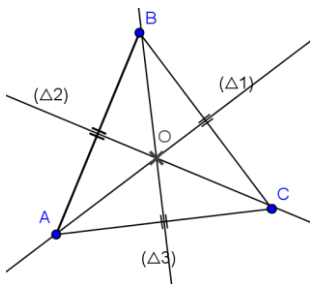
Exercice 4: (étude d'un groupe fini)

Montrer que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +)$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} - \{\bar{0}\}; \times)$ sont

deux groupes commutatifs

Exercice 5: (étude d'un groupe fini)

(ABC) un triangle équilatéral



(Δ_1) la médiatrice du segment $[BC]$

(Δ_2) la médiatrice du segment $[AB]$

(Δ_3) la médiatrice du segment $[AC]$

Soit ζ l'ensemble des transformations

suivantes : $\zeta = \{r_1; r_2; r_3; s_1; s_2; s_3\}$

r_1 la rotation de centre O et d'angle 0 : $r_1(O; 0)$

r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$: $r_2\left(O; \frac{2\pi}{3}\right)$

r_3 la rotation de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$: $r_3\left(O; \frac{4\pi}{3}\right)$

s_1 la symétrie axial d'axe: (Δ_1)

s_2 la symétrie axial d'axe : (Δ_2)

s_3 la symétrie axial d'axe : (Δ_3)

Montrer que : $(\zeta; \circ)$ est un groupe

Exercice 6: soit $(G; \cdot)$ un groupe noté

multiplicativement et e l'élément neutre de G

1) Montrer que si: $\forall (a; b) \in G^2 : (a.b)^2 = a^2 . b^2$

alors le groupe G est commutatif

2) Montrer que si: $\forall x \in G : x^2 = e$ alors le

groupe G est commutatif

Exercice 7: (on considère l'ensemble des

$$\text{matrices suivante : } E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que E n'est pas un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

Exercice 8: soit I l'ensemble des nombres entiers relatifs pairs

montrer que $(I; +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}; +)$

Exercice 9: montrer que : $H = \{3^m 7^n / m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}\}$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*; \times)$

Exercice 10: $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

Montrer que $(U; \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*; \times)$

Exercice 11: on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} \ln a & 0 \\ 0 & \ln a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}^{**} \right\}$$

Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

Exercice 12 : soit $(G; \cdot)$ un groupe noté

multiplicativement et soit $a \in G$

On pose : $C_a = \{x \in G / ax = xa\}$

(centralisateur de a)

Et : $Z(G) = \{x \in G / \forall y \in G : xy = yx\}$ (centre de G)

Montrer que C_a et $Z(G)$ sont des sous-groupes

de : $(G; \cdot)$

Exercice 13 : On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne définie par :

$$x * y = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}; \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

1) soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par : } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$ vers $(\mathbb{R}; *)$

2) En déduire la structure de $(\mathbb{R}; *)$

Exercice 14 : on considère l'ensemble suivant :

$$E = \{a + b\sqrt{3} / (a; b) \in \mathbb{Q}^2\}$$

1) Montrer que $(E; +)$ est un groupe commutatif

2) Montrer que E est une partie stable de $(\mathbb{Q}; \times)$

3) Montrer que $(E; +; \times)$ est un anneau commutatif unitaire

Exercice 15: Soit $(A; +; \times)$ un anneau.

Tel que : $x^2 = x \quad \forall x \in A$ ($(A; +; \times)$ s'appelle anneau de Boole)

1) calculer $(x+x)^2$

2) en déduire que : $x+x=0_A$ (0_A est l'élément

neutre de $(A; +)$)

3) soient : $x \in A$ et $y \in A$

a) calculer $(x+y)^2$ en fonction de x et y

b) en déduire que $(A; +; \times)$ est commutatif

c) en déduire : $xy(x+y)$

4) on suppose que : $x \neq 0_A$ et $y \neq 0_A$ et $y \neq x$

a) montrer que : a) $x+y \neq 0_A$ b) $x+y \neq y$

5) déterminer le tableau de la somme pour les éléments : $0_A ; x ; y ; x+y$

Exercice 16: soit $(K, +, \times)$ un corps fini :

$$K = \{0; e; x_1; x_2; \dots; x_m\}; m \in \mathbb{N}^*$$

Avec : 0 (resp. e) l'élément neutre pour $+$ (resp. \times).

- 1) montrer que : $-e$ et e sont les seuls éléments de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi \times
- 2) montrer que le produit de tous les éléments de K est égal à $-e$

3) on considère le corps $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +; \times)$ avec n

premier montrer que : $\overline{(n-1)!} + 1 \equiv 0 [n]$

Exercice 17: on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que $(E; +)$ est un groupe commutatif

2) Montrer que E est une partie stable de

$$(M_2(\mathbb{R}); \times)$$

3) soit f l'application qui associe à chaque

matrice $M_{(a,b)}$ de $E - \{0_2\}$ le nombre complexe :

$$a + ib\sqrt{2} \text{ de } \mathbb{C}^*$$

a) Montrer que f est un morphisme bijectif de

$$(E - \{0_2\}, \times) \text{ dans } (\mathbb{C}^*; \times)$$

b) en déduire la structure de $(E - \{0_2\}, \times)$

4) Montrer que $(E; +; \times)$ est un corps

Exercice 18: Soit $(K; +; \times)$ un corps.

On note 0_K l'élément neutre de $(K; +)$ et 1_K

l'élément neutre de $(K; \times)$ et on suppose qu'il

existe un homomorphisme f bijectif de $(K; +)$

$$\text{vers } (K - \{0_K\}; \times)$$

1) on suppose que $1_K + 1_K = 0_K$

montrer que : $f(K) = \{1_K\}$

2) on suppose que : $1_K + 1_K \neq 0_K$ et on pose :

$$\alpha = f^{-1}(1_K) \text{ et } \beta = f^{-1}(-1_K)$$

a) montrer que : $\alpha + \alpha = \beta + \beta$

b) en déduire que $\alpha = \beta$

3) en déduire qu'il n'existe pas

d'homomorphisme f bijectif de $(K; +)$ vers

$$(K - \{0_K\}; \times)$$

Exercice 19 :

1) On munit de la loi de composition interne

$$\text{définie par : } x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1); \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.

2) On munit \mathbb{R}^{**} de la loi de $*$ composition interne

$$\text{définie par : } x * y = \sqrt[3]{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de \mathbb{R} n'a de symétrique pour $*$

3) On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne $*$

$$\text{définie par : } x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que l'application : $x \rightarrow x^3$ est un

isomorphisme de $(\mathbb{R}; *)$ vers $(\mathbb{R}; +)$ En déduire que

$(\mathbb{R}; *)$ est un groupe commutatif

Exercice 20: on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$G = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1 \text{ et } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que : $G \neq \emptyset$

$$2) \text{ Montrer que : } G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Montrer que G est une partie stable de

$$(M_2(\mathbb{R}); \times)$$

4) est ce que G est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); +)$?

5) on pose : $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

calculer $M^n(\theta) \forall n \in \mathbb{N}^*$

ou : $M^n(\theta) = \underbrace{M(\theta) \times M(\theta) \times \dots \times M(\theta)}_{n \text{ fois}}$

6) soit f l'application de \mathbb{R} dans G tel que :

$$f(\theta) = M(\theta)$$

a) Montrer que f est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(G; \times)$

b) en déduire la structure de $(G; \times)$

7) soit l'ensemble : $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

a) Montrer que : $U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$

b) Montrer que $(U; \times)$ est un groupe commutatif

Exercice 21: Soit $(A; +; \times)$ un anneau.

Et 1_A est l'élément neutre de $(A; \times)$

soient : $a \in A$ et $b \in A$ tels que :

a) $ab + ba = 1_A$

b) $a^2b + ba^2 = a$

1) montrer que : $a^2b = ba^2$

2) montrer que : $aba + aba = a$

3) en déduire que : $ab = ba$

Exercice 22: Soit $(K; +; \times)$ un corps.

On note : 1_K l'élément neutre de $(K; \times)$

Soient x et y deux éléments de $K - \{0_K\}$

Qui vérifient les conditions suivantes :

a) $x + y = 1_K$ b) $x^{-1} + y^{-1} = 1_K$

avec : x^{-1} le symétrique de x pour la loi \times

1) montrer que : $xy = yx = -1_K$

2) montrer que : $x^4 + y^4 = 7 \cdot 1_K$

Avec : $7 \cdot 1_K = \underbrace{1_K + 1_K + \dots + 1_K}_{7 \text{ fois}}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien



Exercices AVEC SOLUTIONS

Structures algébriques(partie2)

Groupe anneau corps

Exercice 1: on pose $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall (x; y) \in I^2$

On muni I de la loi de composition définie par :

$$x * y = \arctan(-1 + \tan x + \tan y)$$

Montrer que $(I; *)$ est un groupe commutatif

Solution : 1) soit $(x; y) \in I^2$

$$x * y = \arctan(-1 + \tan x + \tan y) = \arctan(-1 + \tan y + \tan x)$$

Donc $x * y = y * x$ et par suite $*$ est commutatif

2) soit $(x; y; z) \in I^3$

$$(x * y) * z = (\arctan(-1 + \tan x + \tan y)) * z$$

$$= \arctan(-1 + \tan(\arctan(-1 + \tan x + \tan y)) + \tan z)$$

$$= \arctan(-1 + (-1 + \tan x + \tan y) + \tan z)$$

$$= \arctan(-2 + \tan x + \tan y + \tan z)$$

Et on a :

$$x * (y * z) = x * (\arctan(-1 + \tan y + \tan z))$$

$$= \arctan(-1 + \tan x + \tan(\arctan(-1 + \tan y + \tan z)))$$

$$= \arctan(-1 + \tan x + (-1 + \tan y + \tan z))$$

$$= \arctan(-2 + \tan x + \tan y + \tan z)$$

Donc : $(x * y) * z = x * (y * z)$

par suite $*$ est associative

3) $\forall x \in I$ on a :

$$x * \frac{\pi}{4} = \arctan\left(-1 + \tan x + \tan \frac{\pi}{4}\right) = \arctan(-1 + \tan x + 1)$$

$$x * \frac{\pi}{4} = \arctan(\tan x) = x$$

Et puisque $*$ est commutatif on a aussi : $\frac{\pi}{4} * x = x$

Et puisque : $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

alors : $*$ possède un élément neutre $e = \frac{\pi}{4}$

4) soit : $x \in I$ on cherche $x' \in I$ tel que :

$$x * x' = \frac{\pi}{4} ?$$

$$x * x' = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arctan(-1 + \tan x + \tan x') = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -1 + \tan x + \tan x' = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \tan x + \tan x' = 2$$

$$\Leftrightarrow \tan x' = 2 - \tan x \Leftrightarrow x' = \arctan(2 - \tan x) \in I$$

Donc : tout élément de I possède un symétrique pour $*$ dans I .

Finalement : $(I; *)$ est un groupe commutatif

Exercice 2: on muni \mathbb{R}^2 d'une loi de composition interne T définie par :

$$(x; y) T (x'; y') = (x + x'; ye^{x'} + y'e^{-x})$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (x'; y') \in \mathbb{R}^2$$

Monter que $(\mathbb{R}^2; T)$ groupe non commutative

Solution : a) soient $(x; y)$; $(x'; y')$ et $(x''; y'')$ des éléments de \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} ((x; y)T(x'; y'))T(x''; y'') &= (x+x'; ye^{x'} + y'e^{-x'})T(x''; y'') \\ &= (x+x'+x''; (ye^{x'} + y'e^{-x'})e^{x''} + y''e^{-(x+x')}) \\ &= (x+x'+x''; ye^{-(x'+x'')} + y'e^{-x+x''} + y''e^{-(x+x')}) \\ (x; y)T((x'; y')T(x''; y'')) &= (x; y)T(x'+x''; y'e^{x'} + y''e^{-x'}) \\ &= (x+x'+x''; (y'e^{x''} + y''e^{-x'})e^{-x} + ye^{x'+x''}) \\ &= (x+x'+x''; y'e^{(x''-x)} + y''e^{-(x+x')} + ye^{x'+x''}) \end{aligned}$$

Donc :

$$((x; y)T(x'; y'))T(x''; y'') = (x; y)T((x'; y')T(x''; y''))$$

donc : T est associative

b) l'élément neutre de T ?

$(e_1; e_2)$ l'élément neutre de T ssi $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x; y)T(e_1; e_2) = (x; y) \text{ et } (e_1; e_2)T(x; y) = (x; y)$$

$$(x; y)T(e_1; e_2) = (x; y) \Leftrightarrow (x+e_1; ye^{e_1} + e_2e^{-x}) = (x; y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+e_1 = x \\ ye^{e_1} + e_2e^{-x} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

Et on a : $(0; 0)T(x; y) = (x; y)$

Donc : $(0; 0)$ est l'élément neutre de T

c) le symétrique d'un élément dans T ?

soient $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ montrons l'existence de

$(x'; y') \in \mathbb{R}^2$ tel que : $(x; y)T(x'; y') = (0; 0)$ et

$$(x'; y')T(x; y) = (0; 0)$$

$$(x; y)T(x'; y') = (0; 0) \Leftrightarrow (x+x'; ye^{x'} + y'e^{-x}) = (0; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+x' = 0 \\ ye^{x'} + y'e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ (y+y')e^{-x} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y+y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

On a aussi : $(-x; -y)T(x; y) = (0; 0)$

Donc : $(-x; -y)$ est le symétrique de élément

$(x; y)$ dans T

Donc : $(\mathbb{R}^2; T)$ est un groupe

Et puisque : $(1; 1)T(1; 0) = (2; e)$ et $(1; 0)T(1; 1) = (2; e^{-1})$

Alors : $(1; 1)T(1; 0) \neq (1; 0)T(1; 1)$

donc : T n'est pas commutative

Exercice 3: soit $(G; \cdot)$ un groupe noté

multiplicativement et tel que : $(a; b) \in G^2$

$(ab)^2 = a^2b^2$ Montrer que ce groupe est

commutatif

Solution : par hypothèse on a quels que soient

les éléments $(a; b) \in G^2$: $abab = aabb$

Mais dans un groupe tout élément étant régulier on peut simplifier à gauche par a et à droite par b

Donc : $abab = aabb$

Donc $ba = ab$ et par suite ce groupe est

commutatif

$$x = b * a'$$

Exercice 4: (étude d'un groupe fini)

Montrer que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +)$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} - \{\bar{0}\}; \times)$ sont

deux groupes commutatifs

Solution :

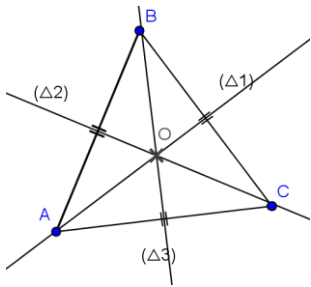
+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Tableau de : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +)$

Tableau de : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; \times)$

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Exercice 5: (étude d'un groupe fini) (ABC) un triangle équilatéral



(Δ_1) la médiatrice du segment $[BC]$

(Δ_2) la médiatrice du segment $[AB]$

(Δ_3) la médiatrice du segment $[AC]$

Soit ζ l'ensemble des transformations

suivantes : $\zeta = \{r_1; r_2; r_3; s_1; s_2; s_3\}$

r_1 la rotation de centre O et d'angle 0 : $r_1(O; 0)$

r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$: $r_2\left(O; \frac{2\pi}{3}\right)$

r_3 la rotation de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$: $r_3\left(O; \frac{4\pi}{3}\right)$

s_1 la symétrie axial d'axe: (Δ_1)

s_2 la symétrie axial d'axe : (Δ_2)

s_3 la symétrie axial d'axe : (Δ_3)

Montrer que : $(\zeta; \circ)$ est un groupe

Solution : on utilisant la loi de composition des transformation \circ on trouve le tableau suivant :

\circ	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_2	r_2	r_3	r_1	s_3	s_1	s_2
r_3	r_3	r_1	r_2	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2	r_3
s_2	s_2	s_3	s_1	r_3	r_1	r_2
s_3	s_3	s_1	s_2	r_2	r_3	r_1

Remarque : si $(G; *)$ est un groupe fini alors

chaque élément de G se trouve sur le tableau une fois dans chaque ligne et dans chaque colonne

Exercice 6: soit $(G; \cdot)$ un groupe noté

multiplicativement et e l'élément neutre de G

1) Montrer que si: $\forall (a; b) \in G^2 : (ab)^2 = a^2 \cdot b^2$

alors le groupe G est commutatif

2) Montrer que si: $\forall x \in G : x^2 = e$ alors le

groupe G est commutatif

Solution : 1) soit $(a; b) \in G^2$

par hypothèse on a: $(ab)^2 = a^2 \cdot b^2$

donc : $ab \cdot ab = a \cdot a \cdot b \cdot b$ puisque G un groupe tout élément de G est régulier

Donc : $b \cdot a = a \cdot b$

Par suite ce groupe est commutatif

2) soient les éléments $(x; y) \in G^2$

par hypothèse on a: $xyxy = e$

on multipliant à gauche par x et à droite par y

Donc : $xxyxyy = xey \Rightarrow x^2 yxy^2 = xey \Rightarrow eyxe = xy$

$\Rightarrow yx = xy$ Par suite ce groupe est commutatif

Exercice 7: (on considère l'ensemble des

matrices suivante : $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$

Monter que E n'est pas un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

Solution : soit $M_a \in E$ et $M_b \in E$

$$\text{Donc : } M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_a \times M_b \in E ?$

$$M_a \times M_b = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & b \\ 2 & 2b \end{pmatrix} \notin E$$

donc : E n'est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

donc : E n'est pas un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

Exercice 8: soit I l'ensemble des nombres entiers relatifs pairs

montrer que $(I; +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}; +)$

Solution : on a : $I \subset \mathbb{Z}$

$$(1) I \neq \emptyset \text{ car } 0 = 2 \times 0 \in I$$

$$(2) \forall (x, y) \in I^2; x - y \in I ?$$

Soient : $x \in I$ et $y \in I$ donc : $x = 2 \times p$ et $x = 2 \times q$

$$x - y = 2 \times p - 2 \times q = 2 \times (p - q) = 2 \times k \in I$$

Donc : $(I; +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}; +)$ d'après

La propriété caractéristique d'un sous-groupe

Exercice 9: montrer que : $H = \{3^m 7^n \mid m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}\}$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*; \times)$

Solution : on a : $H \subset \mathbb{R}^*$ car $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2; 3^m 7^n \in \mathbb{R}^*$

$$(1) H \neq \emptyset \text{ car } 3^0 7^0 = 1 \in H$$

$$(2) \forall (x, y) \in H^2; x \times y^{-1} \in H ?$$

Soient : $x \in H$ et $y \in H$ donc :

$$\exists (n, m) \in \mathbb{Z}^2; x = 3^m 7^n$$

Et $\exists (p, q) \in \mathbb{Z}^2; y = 3^p 7^q$

$$x \times y^{-1} = 3^m 7^n \times (3^p 7^q)^{-1} = 3^m 7^n \times 3^{-p} 7^{-q}$$

$$x \times y^{-1} = 3^m 7^n \times (3^p 7^q)^{-1} = 3^{m-p} 7^{n-q} = 3^e 7^f$$

Avec : $(e, f) \in \mathbb{Z}^2$ donc :

$$(2) \forall (x, y) \in H^2; x \times y^{-1} \in H$$

Donc : $(H; \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*; \times)$

D'après la propriété caractéristique d'un sous-groupe

Exercice 10: $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Montrer que $(U; \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*; \times)$

Solution :

1) Un nombre complexe de module 1 est non nul et donc $U \subset \mathbb{C}^*$

Et 1 a pour module 1 et donc $1 \in U$.

Soit alors $(z_1; z_2) \in U^2$.

$$z_1 \times z_2^{-1} \in U ???$$

$$|z_1 \times z_2^{-1}| = |z_1| \times |z_2^{-1}| = |z_1| \times |z_2|^{-1} = 1 \times 1 = 1 \times 1 = 1 \in U$$

Exercice 11: on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} \ln a & 0 \\ 0 & \ln a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^{+*} \right\}$$

Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

$$\text{Solution : } 1) \text{ on a } M_e = \begin{pmatrix} \ln e & 0 \\ 0 & \ln e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Donc : $I_2 \in E$ donc : $E \neq \emptyset$

2) soit $M_a \in E$ et $M_b \in E$ $M_a - M_b \in E ?$

$$M_a - M_b = \begin{pmatrix} \ln a & 0 \\ 0 & \ln a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ln b & 0 \\ 0 & \ln b \end{pmatrix}$$

$$M_a - M_b = \begin{pmatrix} \ln a - \ln b & 0 \\ 0 & \ln a - \ln b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \ln \frac{a}{b} \end{pmatrix} = M_{a/b}$$

Et puisque $a \in \mathbb{R}^{**}$ et $b \in \mathbb{R}^{**}$ alors $a/b \in \mathbb{R}^{**}$

Donc : $M_a - M_b = M_{a/b} \in E$

Donc : E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

Exercice 12 : soit $(G; \cdot)$ un groupe noté

multiplicativement et soit $a \in G$

On pose : $C_a = \{x \in G / ax = xa\}$

(centralisateur de a)

Et : $Z(G) = \{x \in G / \forall y \in G : xy = yx\}$ (centre de G)

Montrer que C_a et $Z(G)$ sont des sous-groupes

de : $(G; \cdot)$

Solution : 1) Montrons que C_a est un sous-groupe de $(G; \cdot)$?

Soit e l'élément neutre du groupe $(G; \cdot)$

a) on a : $ae = ea = a$ donc $e \in C_a$ donc : $C_a \neq \emptyset$

b) soient les éléments $(x; y) \in C_a^2$

montrons que : $xy^{-1} \in C_a$ cad montrons que :

$a(xy^{-1}) = (xy^{-1})a$??

On a $(x; y) \in C_a^2$ donc : $\begin{cases} ax = xa(1) \\ ay = ya(2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow (ay)^{-1} = (ya)^{-1} \Leftrightarrow y^{-1}a^{-1} = a^{-1}y^{-1}$

$\Rightarrow y^{-1}a^{-1} = a^{-1}y^{-1}$ et $ax = xa(1)$

$\Rightarrow axy^{-1}a^{-1} = xaa^{-1}y^{-1} \Rightarrow axy^{-1}a^{-1} = xey^{-1}$

$\Rightarrow axy^{-1}a^{-1} = xy^{-1} \Rightarrow axy^{-1}a^{-1}a = xy^{-1}a$

$\Rightarrow axy^{-1}e = xy^{-1}a \Rightarrow axy^{-1} = xy^{-1}a$ donc $xy^{-1} \in C_a$

Donc : C_a est un sous-groupe de $(G; \cdot)$

2) Montrons que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G; \cdot)$?

a) on a : $\forall y \in G : ey = ye$ donc $e \in Z(G)$

donc : $Z(G) \neq \emptyset$

b) soient les éléments $(a; b) \in Z(G)^2$

montrons que : $ab^{-1} \in Z(G)$ cad montrons que :

$(ab^{-1})y = y(ab^{-1}) \quad \forall y \in G$??

On a $(a; b) \in Z(G)^2$ donc : $\begin{cases} ay = ya(1) \\ by = yb(2) \end{cases}$

De la même façon que précédemment on trouve

$(ab^{-1})y = y(ab^{-1}) \quad \forall y \in G$ donc $ab^{-1} \in Z(G)$

Donc : $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G; \cdot)$

Exercice 13 : On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne définie par :

$x * y = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}; \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

1) soit l'application :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$

vers $(\mathbb{R}; *)$

2) En déduire la structure de $(\mathbb{R}; *)$

Solution : 1) a) f est une fonction continue et

dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}

Par suite f est une fonction bijectif de \mathbb{R}

Dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

b) soient $x; y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

$$f(x) * f(y) = f(x) \sqrt{f(y)^2 + 1} + f(y) \sqrt{f(x)^2 + 1}$$

Et on a :

$$f(y)^2 + 1 = 1 + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4} = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2$$

Donc : $\sqrt{f(y)^2 + 1} = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ de même on a :

$$\sqrt{f(x)^2 + 1} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{Donc :}$$

$$f(x) * f(y) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$

$$f(x) * f(y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

Finalement : $f(x+y) = f(x) * f(y)$

Donc : f est un homomorphisme bijectif de $(\mathbb{R}; +)$

vers $(\mathbb{R}; *)$ donc un isomorphisme

2) puisque : f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$ vers

$(\mathbb{R}; *)$ et $(\mathbb{R}; +)$ est un groupe commutatif

Alors : $(\mathbb{R}; *)$ est un groupe commutatif

Exercice 14 : on considère l'ensemble suivant :

$$E = \{a + b\sqrt{3} / (a; b) \in \mathbb{Q}^2\}$$

1) Monter que $(E; +)$ est un groupe commutatif

2) Monter que E est une partie stable de $(\mathbb{Q}; \times)$

3) Monter que $(E; +; \times)$ est un anneau commutatif unitaire

Solution : 1) Montrons que $(E; +)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{Q}; +)$?

On a $E \subset \mathbb{Q}$ et on a $1 = 1 + 0\sqrt{3}$ donc : $1 \in E$

donc : $E \neq \emptyset$

soit $x \in E$ et $y \in E$ montrons $x - y \in E$?

$$x \in E \Leftrightarrow \exists (a; b) \in \mathbb{Q}^2 / x = a + b\sqrt{3}$$

$$y \in E \Leftrightarrow \exists (c; d) \in \mathbb{Q}^2 / y = c + d\sqrt{3}$$

$$x - y = (a + b\sqrt{3}) - (c + d\sqrt{3}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3}$$

On a $(a; b; c; d) \in \mathbb{Q}^4$ donc : $a - c \in \mathbb{Q}$ et $b - d \in \mathbb{Q}$

Donc : $x - y = a'' + b''\sqrt{3}$ par suite : $x - y \in E$

Donc : $(E; +)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{Q}; +)$

donc $(E; +)$ est un un groupe

2)) Montrons que E est une partie stable

de $(\mathbb{Q}; \times)$?

soit $x \in E$ et $y \in E$ montrons $x \times y \in E$?

$$x - y = (a + b\sqrt{3}) \times (c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$$

puisque $(a; b; c; d) \in \mathbb{Q}^4$ alors : $ac + 3bd \in \mathbb{Q}$ et

$ad + bc \in \mathbb{Q}$ donc : $x \times y \in E$

$$: E = \{a + b\sqrt{3} / (a; b) \in \mathbb{Q}^2\}$$

Donc : E est une partie stable de $(\mathbb{Q}; \times)$

3) on a $(\mathbb{Q}; +; \times)$ est un anneau commutatif

Donc La multiplication est commutative et distributive par rapport à l'addition dans E

Par suite $(E; +; \times)$ un anneau commutatif

Et $1 = 1 + 0\sqrt{3}$ donc : $1 \in E$ et 1 est l'élément

neutre de la multiplication dans $(\mathbb{Q}; \times)$

Donc : 1 est l'élément neutre de la multiplication dans E

Conclusion : $(E; +; \times)$ est un anneau commutatif unitaire

Exercice 15: Soit $(A; +; \times)$ un anneau.

Tel que : $x^2 = x \quad \forall x \in A$ ($(A; +; \times)$ s'appelle

anneau

De Boole)

1) calculer $(x+x)^2$

2) en déduire que : $x+x=0_A$ (0_A est l'élément

neutre de $(A; +)$)

3) soient : $x \in A$ et $y \in A$

a) calculer $(x+y)^2$ en fonction de x et y

b) en déduire que $(A; +; \times)$ est commutatif

c) en déduire : $xy(x+y)$

4) on suppose que : $x \neq 0_A$ et $y \neq 0_A$ et $y \neq x$

a) montrer que : a) $x+y \neq 0_A$ b) $x+y \neq y$

5) déterminer le tableau de la somme pour les

éléments : $0_A ; x ; y ; x+y$

Solution : 1) soit $x \in A$ on a :

$$(x+x)^2 = (x+x)(x+x) = xx+xx+xx+xx$$

$$(x+x)^2 = x^2+x^2+x^2+x^2 = x+x+x+x \text{ car } x^2 = x$$

$$\text{Donc : } (x+x)^2 = x+x+x+x$$

2) a) soient : $x \in A$ et $y \in A$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx+xy+yx+yy$$

$$(x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2$$

$$(x+y)^2 = x+xy+yx+y \text{ car } x^2 = x \quad \forall x \in A$$

$$\text{b) on a : } (x+y)^2 = x+xy+yx+y \text{ et } (x+y)^2 = x+y$$

$$\text{donc : } x+xy+yx+y = x+y$$

$$\text{donc : } xy+yx=0_A \text{ et puisque } xy+xy=0_A$$

$$\text{Alors : } xy+yx = xy+xy \text{ donc } yx = xy$$

Donc : $(A; +; \times)$ est commutatif

c) déduction de : $xy(x+y)$

soient : $x \in A$ et $y \in A$

$$xy(x+y) = xyx+xy^2 = xxy+xy^2 = x^2y+xy^2 = xy+xy$$

$$\text{et puisque } xy+xy=0_A \text{ alors : } xy(x+y)=0_A$$

4) on suppose que : $x \neq 0_A$ et $y \neq 0_A$ et $y \neq x$

a) on suppose que $x+y=0_A$ et puisque $x+x=0_A$

$$\text{Alors : } x+y = x+x \text{ cad } y = x \text{ contradiction}$$

$$\text{Donc : } x+y \neq 0_A$$

b) on suppose que $x+y=y$ donc : $x=0_A$

Contradiction donc $x+y \neq y$

5) on a : $x+x=0_A$ et $x+0_A=0_A+x=x$

+	0_A	x	y	$x+y$
0_A	0_A	x	y	$x+y$
x	x	0_A	$x+y$	y
y	y	$x+y$	0_A	x
$x+y$	$x+y$	y	x	0_A

Exercice 16: soit $(K, +, \times)$ un corps finit :

$$K = \{0; e; x_1; x_2; \dots; x_m\} ; m \in \mathbb{N}^*$$

Avec : 0 (resp. e) l'élément neutre pour + (resp. \times).

1) montrer que : $-e$ et e sont les seuls éléments de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi \times

2) montrer que le produit de tous les éléments de K est égal à $-e$

3) on considérant le corps $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +; \times)$ avec n

premier montrer que : $(n-1)! + 1 \equiv 0 [n]$

Solution : 1)

$$\forall x \in K - \{0\} \quad x = x^{-1} \Leftrightarrow x \times x = x^{-1} \times x \Leftrightarrow x^2 = e$$

$$\Leftrightarrow x^2 - e = 0 \Leftrightarrow x^2 - e^2 = 0 \Leftrightarrow (x - e)(x + e) = 0$$

$\Leftrightarrow x = -e$ ou $x = e$ car $(K, +, \times)$ un corps

2) puisque : $-e$ et e sont les seuls éléments de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi \times

$$\text{Alors : } K - \{0\} = \{-e; e; a_1; a_1^{-1}; a_2; a_2^{-1} \dots; a_p; a_p^{-1}\}$$

$$\text{Donc : } -e \times e \times a_1 \times a_1^{-1} \times a_2 \times a_2^{-1} \dots \times a_p \times a_p^{-1} = -e \times e \times e \times e \dots \times e = -e$$

$$3) \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \dots; \overline{n-1}\} \text{ (un corps)}$$

D'après les questions précédentes on a :

$$\bar{1} \times \bar{2} \times \dots \times \overline{n-1} = \bar{-1} \text{ donc :}$$

$$\overline{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)} = \bar{-1}$$

$$\text{donc : } \overline{(n-1)!} + 1 \equiv 0 [n]$$

$$xa = ya \Rightarrow x = y$$

Exercice 17: on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Monter que $(E; +)$ est un groupe commutatif

2) Monter que E est une partie stable de

$$(M_2(\mathbb{R}); \times)$$

3) soit f l'application qui associe à chaque

matrice $M_{(a;b)}$ de $E - \{0_2\}$ le nombre complexe :

$$a + ib\sqrt{2} \text{ de } \mathbb{C}^*$$

a) Monter que f est un morphisme bijectif de

$$(E - \{0_2\}, \times) \text{ dans } (\mathbb{C}^*; \times)$$

b) en déduire la structure de $(E - \{0_2\}, \times)$

4) Monter que $(E; +; \times)$ est un corps

Solution : 1) on a : $M_{(0;0)} = 0_2 \in E$ donc : $E \neq \emptyset$

$$\text{Et on a } E \subset (M_2(\mathbb{R}); \times)$$

soit $M_{(a;b)} \in E$ et $M_{(c;d)} \in E$

$$\text{Donc : } M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$M_{(a;b)} - M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & -2(b-d) \\ b-d & a-c \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } M_{(a;b)} - M_{(c;d)} = M_{(a-c; b-d)}$$

Et puisque : $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ alors : $a - c \in \mathbb{R}$ et

$$b - d \in \mathbb{R} \text{ donc : } M_{(a;b)} - M_{(c;d)} \in E$$

Donc : $(E; +)$ est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

donc $(E; +)$ est un groupe commutatif

$$2) M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} =$$

$$M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} ac - 2bd & -2(ad + bc) \\ ad + bc & ac - 2bd \end{pmatrix} = M_{(ac - 2bd; ad + bc)}$$

Et puisque : $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ alors : $ac - 2bd \in \mathbb{R}$ et

$$ad + bc \in \mathbb{R} \text{ donc : } M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} \in E$$

E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

3) soient : $M_{(a;b)} \in E$ et $M_{(c;d)} \in E$

$$f(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}) = f(M_{(ac - 2bd; ad + bc)})$$

$$= ac - 2bd + i(ad + bc)\sqrt{2}$$

$$f(M_{(a;b)}) \times f(M_{(c;d)}) = (a + ib\sqrt{2})(c + id\sqrt{2})$$

$$= ac - 2bd + i(ad + bc)\sqrt{2} = f(M_{(ac - 2bd; ad + bc)})$$

$$= f(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)})$$

f est un morphisme de $(E - \{0_2\}, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*; \times)$

Soit $x + iy \in \mathbb{C}^*$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

On cherche $M_{(a;b)} \in E$ tel que : $f(M_{(a;b)}) = x + iy$

$$f(M_{(a,b)}) = x + iy \Leftrightarrow a + ib\sqrt{2} = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ Existe et il}$$

est unique

donc : f est un morphisme bijectif de

$$(E - \{0_2\}, \times) \text{ dans } (\mathbb{C}^*; \times)$$

b) $(E - \{0_2\}, \times)$ et $(\mathbb{C}^*; \times)$ sont isomorphes

et $(\mathbb{C}^*; \times)$ un groupe commutatif donc aussi

et on a $(E - \{0_2\}, \times)$ un groupe commutatif

4) La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $M_2(\mathbb{R})$ et E est une partie stable

de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$ donc La multiplication est

distributive par rapport à l'addition dans E

Donc on a : $(E; +)$ est un groupe commutatif et

$(E - \{0_2\}, \times)$ un groupe commutatif

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Conclusion : $(E; +; \times)$ est un corps

Exercice 18: Soit $(K; +; \times)$ un corps.

On note : 0_K l'élément neutre de $(K; +)$ et 1_K

l'élément neutre de $(K; \times)$ et on suppose qu'il

existe un homomorphisme f bijectif de $(K; +)$

vers $(K - \{0_K\}; \times)$

1) on suppose que $1_K + 1_K = 0_K$

montrer que : $f(K) = \{1_K\}$

2) on suppose que : $1_K + 1_K \neq 0_K$ et on pose :

$$\alpha = f^{-1}(1_K) \text{ et } \beta = f^{-1}(-1_K)$$

a) montrer que : $\alpha + \alpha = \beta + \beta$

b) en déduire que $\alpha = \beta$

3) en déduire qu'il n'existe pas

d'homomorphisme f bijectif de $(K; +)$ vers

$$(K - \{0_K\}; \times)$$

Solution : 1) on suppose que $1_K + 1_K = 0_K$

soit $x \in K$ on a donc : $x \times (1_K + 1_K) = x \times 0_K$

$$\text{donc : } x \times 1_K + x \times 1_K = x \times 0_K$$

$$\text{donc : } x + x = 0_K \quad \text{donc : } f(x + x) = f(0_K)$$

puisque f homomorphisme bijectif de $(K; +)$ vers

$$(K - \{0_K\}; \times) \text{ on a donc : } f(x) \times f(x) = 1_K$$

$$\text{donc : } (f(x))^2 = 1_K \quad \text{donc : } (f(x) - 1_K)(f(x) + 1_K) = 0_K$$

$$\text{donc : } f(x) = 1_K \text{ ou } f(x) = -1_K = 1_K \text{ car}$$

$$1_K + 1_K = 0_K$$

$$\text{donc : } \forall x \in K \quad f(x) = 1_K \quad \text{donc : } f(K) = \{1_K\}$$

2) a) on a : $1_K + 1_K \neq 0_K$ et $\alpha = f^{-1}(1_K)$ et $\beta = f^{-1}(-1_K)$

$$\alpha = f^{-1}(1_K) \Leftrightarrow f(\alpha) = 1_K \quad \text{et } \beta = f^{-1}(-1_K) \Leftrightarrow f(\beta) = -1_K$$

$$\text{donc : } f(\alpha + \alpha) = (f(\alpha))^2 = (1_K)^2 = 1_K$$

$$\text{et } f(\beta + \beta) = (f(\beta))^2 = (-1_K)^2 = 1_K$$

$$\text{donc : } f(\alpha + \alpha) = f(\beta + \beta)$$

$$\text{donc : } \alpha + \alpha = \beta + \beta \quad \text{car } f \text{ bijectif}$$

$$\text{b) on a : } \alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) = 0_K$$

$$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta) \times (1_K + 1_K) = 0_K$$

$$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0_K \text{ ou } 1_K + 1_K = 0_K$$

$$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0_K \text{ car } 1_K + 1_K \neq 0_K$$

$$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

3) s'il existe un homomorphisme f bijectif de

$(K; +)$ vers $(K - \{0_K\}; \times)$ on alors deux cas :

1 cas : $1_K + 1_K = 0_K$ d'après 1) on a :

$$\forall x \in K \quad f(x) = 1_K \Leftrightarrow \forall x \in K; f(x) = f(0_K)$$

Puisque f bijectif : $\forall x \in K \quad x = 0_K$

Cad $K = \{0_K\}$ et donc : $K - \{0_K\} = \emptyset$

contradiction

2 cas : $1_K + 1_K \neq 0_K$ d'après 2) et on posons :

$$\alpha = f^{-1}(1_K) \text{ et } \beta = f^{-1}(-1_K) \text{ on trouve : } \alpha = \beta$$

Cad $f^{-1}(-1_K) = f^{-1}(1_K)$ et Puisque f^{-1} bijectif

Alors : $-1_K = 1_K$ cad $1_K + 1_K = 0_K$ contradiction

Avec le fait que $1_K + 1_K \neq 0_K$

Donc : qu'il n'existe pas d'homomorphisme f

bijectif de $(K; +)$ vers $(K - \{0_K\}; \times)$

Exercice19:

1) On munit de la loi de composition interne

définie par : $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1); \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.

2) On munit \mathbb{R}^{+*} de la loi de $*$ composition interne

définie par : $x * y = \sqrt[3]{x^2 + y^2} \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de \mathbb{R}^{+*} n'a de symétrique pour $*$

3) On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne $*$

définie par : $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que l'application : $x \rightarrow x^3$ est un

isomorphisme de $(\mathbb{R}; *)$ vers $(\mathbb{R}; +)$ En déduire que

$(\mathbb{R}; *)$ est un groupe commutatif

Solution : 1) $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$

$$= yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1)$$

La loi est commutative

Pour montrer que la loi n'est pas associative, il

suffit de trouver $x; y; z \in \mathbb{R}$ et tels que :

$$x * (y * z) \neq (x * y) * z$$

1 sera l'élément neutre il ne faut pas prendre 1

dans $x; y; z$ et.

Prenons, par exemple : $x = 0; y = 2; z = 3$

$$x * (y * z) = 0 * (2 * 3) = 0 * (2 \times 3 + (2^2 - 1)(3^2 - 1))$$

$$= 0 * 30 = 0 \times 30 + (0^2 - 1)(30^2 - 1) = -899$$

$$(x * y) * z = (0 * 2) * 3 = 0 * 2 + (0^2 - 1)(2^2 - 1) * 3$$

$$= -3 * 3 = 0 * 2 + ((-3)^2 - 1)(3^2 - 1) = -9 + 8^2 = 55$$

La loi n'est pas associative

$$1 * x = 1x + (1^2 - 1)(x^2 - 1) = x$$

De plus, comme la loi est commutative

$$x * 1 = 1 * x$$

On a bien $x * 1 = 1 * x = x$, 1 est l'élément neutre.

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x$$

La loi est commutative.

$$(x * y) * z = (\sqrt{x^2 + y^2}) * z = (\sqrt{x^2 + y^2}) * z = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2}$$

$$(x * y) * z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

En reprenant le calcul ci-dessus en changeant

$$\text{en } (x; y; z) \text{ en } (y; z; x) \quad (y * z) * x = \sqrt{y^2 + z^2 + x^2}$$

Comme $*$ est commutative :

$(y * z) * x = x * (y * z)$ Et finalement :

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

La loi est associative.

Remarque : On aurait pu calculer directement

$$x * (y * z)$$

$$0 * x = \sqrt{0^2 + x^2} = |x| \text{ car } x \geq 0$$

Comme $*$ est commutative : $0 * x = x * 0 = x$

0 est l'élément neutre.

Supposons x qu'admette un symétrique y

$$x * y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = |x| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$$

Or $x > 0$ et $y > 0$ donc : $x * y = 0$ est impossible,

pour tout $x > 0$ x n'a pas de symétrique.

3) On pose $\rho(x) = x^3$ ET $\rho'(x) > 0$ pour tout

$x \neq 0$ et est nul en 0, ρ est une fonction

strictement croissante \mathbb{R} de sur \mathbb{R} , ρ est une

bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . Il reste à montrer qu'il s'agit d'un morphisme.

$$\rho(x * y) = (x * y)^3 = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)^3 = x^3 + y^3 = \rho(x) + \rho(y)$$

ρ est un morphisme de $(\mathbb{R}; *)$ dans $(\mathbb{R}; +)$ et

donc un isomorphisme de $(\mathbb{R}; *)$ dans $(\mathbb{R}; +)$

(puisque ρ est bijective).

ρ^{-1} est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(\mathbb{R}; *)$

donc un morphisme, $(\mathbb{R}; +)$ est un groupe commutatif

et l'image d'un groupe commutatif par un morphisme de groupe est un groupe.

$(\mathbb{R}; *)$ est un groupe.

Exercice 20: on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$G = \left\{ M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1 \text{ et } (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Monter que : $G \neq \emptyset$

$$2) \text{ Monter que : } G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Monter que G est une partie stable de

$$(M_2(\mathbb{R}); \times)$$

4) est ce que G est une partie stable de

$$(M_2(\mathbb{R}); +) ?$$

$$5) \text{ on pose : } M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

calculer $M^n(\theta) \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{ou : } M^n(\theta) = \underbrace{M(\theta) \times M(\theta) \times \dots \times M(\theta)}_{n \text{ fois}}$$

6) soit f l'application de \mathbb{R} dans G tel que :

$$f(\theta) = M(\theta)$$

a) Monter que f est un morphisme surjectif de

$$(\mathbb{R}; +) \text{ dans } (G; \times)$$

b) en déduire la structure de $(G; \times)$

$$7) \text{ soit l'ensemble : } U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

$$a) \text{ Monter que : } U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$$

b) Monter que $(U; \times)$ est un groupe commutatif

$$\text{Solution : 1) on a : } M_{(1;0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ et } 0^2 + 1^2 = 1$$

donc : $G \neq \emptyset$

2)

$$M \in G \Leftrightarrow \exists (a;b) \in \mathbb{R}^2 / M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } a^2 + b^2 = 1$$

$$\exists \theta \in \mathbb{R} / a = \cos \theta \text{ et } b = \sin \theta$$

$$\text{Donc : } M \in G \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

3) soit : $M_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$

Deux éléments de G

$$M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

Donc : $M_1 \times M_2 \in G$

Donc G est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

4) on a ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$

Deux éléments de G

Et puisque : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$

Car $0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$

Donc G n'est pas une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

5) on pose : $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Calculons : $M^n(\theta)$

$$M^2(\theta) = M(\theta) \times M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Montrons que :

$$M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = M(n\theta)$$

par récurrence sur \mathbb{N}^*

a) on a : $M^1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = M(1\theta)$

la ppte est vraie pour $n=1$

b) on suppose que :

$$M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = M(n\theta)$$

c) montrons que :

$$M^{n+1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{pmatrix} = M((n+1)\theta) ?$$

$$M^{n+1}(\theta) = M(\theta) M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n\theta + \theta) & -\sin(n\theta + \theta) \\ \sin(n\theta + \theta) & \cos(n\theta + \theta) \end{pmatrix} = M((n+1)\theta)$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n(\theta) = M(n\theta)$

6)a) Soit $(\theta_1; \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

On a : $f(\theta_1 + \theta_2) = M(\theta_1 + \theta_2) = M(\theta_1) \times M(\theta_2)$

donc : $f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1) \times f(\theta_2)$

donc : f est un morphisme de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(G; \times)$

et on a : $\forall M \in G \quad \exists \theta \in \mathbb{R} / f(\theta) = M(\theta)$

donc f est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R}; +)$ dans

$(G; \times)$

6)b) puisque f est un morphisme surjectif de

$(\mathbb{R}; +)$ dans $(G; \times)$ on a $f(G) = \mathbb{R}$ et on a aussi

$(\mathbb{R}; +)$ est un groupe commutatif alors aussi

$(G; \times)$ est un groupe commutatif

7) a) Montrons que : $U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\} ?$

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$$z \in U \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow |a + ib| = 1$$

$$z \in U \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / a = \cos \theta \text{ et } b = \sin \theta \text{ et } z = a + ib$$

$$z \in U \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

$$\text{Donc : } U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$$

b) Montrons que $(U; \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*; \times)$

on a $U \subset \mathbb{C}^*$ et $U \neq \emptyset$ car $1 \in U$

Soient $z_1 \in U$ et $z_2 \in U$ montrons que

$$z_1 \times z_2^{-1} \in U ?$$

$$z_1 \in U \Leftrightarrow \exists \theta_1 \in \mathbb{R} : z_1 = e^{i\theta_1}$$

$$z_2 \in U \Leftrightarrow \exists \theta_2 \in \mathbb{R} : z_2 = e^{i\theta_2}$$

$$\text{On a : } z_1 \times z_2^{-1} = e^{i\theta_1} \times (e^{i\theta_2})^{-1} = e^{i\theta_1} \times e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\text{Avec } \theta_1 - \theta_2 \in \mathbb{R} \text{ donc : } z_1 \times z_2^{-1} \in U$$

Donc : $(U; \times)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*; \times)$

Et puisque $(\mathbb{C}^*; \times)$ est commutatif

Alors : $(U; \times)$ est un groupe commutatif

$$2) M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} =$$

$$M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} ac - 2bd & -2(ad + bc) \\ ad + bc & ac - 2bd \end{pmatrix} = M_{(ac - 2bd; ad + bc)}$$

Et puisque : $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ alors : $ac - 2bd \in \mathbb{R}$ et

$$ad + bc \in \mathbb{R} \text{ donc : } M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} \in E$$

E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

3) soient : $M_{(a;b)} \in E$ et $M_{(c;d)} \in E$

$$f(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}) = f(M_{(ac - 2bd; ad + bc)})$$

$$= ac - 2bd + i(ad + bc)\sqrt{2}$$

$$f(M_{(a;b)}) \times f(M_{(c;d)}) = (a + ib\sqrt{2})(c + id\sqrt{2})$$

$$= ac - 2bd + i(ad + bc)\sqrt{2} = f(M_{(ac - 2bd; ad + bc)})$$

$$= f(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)})$$

f est un morphisme de $(E - \{0_2\}, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*; \times)$

Soit $x + iy \in \mathbb{C}^*$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

On cherche $M_{(a;b)} \in E$ tel que : $f(M_{(a;b)}) = x + iy$

$$f(M_{(a;b)}) = x + iy \Leftrightarrow a + ib\sqrt{2} = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ Existe et il}$$

est unique

donc : f est un morphisme bijectif de

$(E - \{0_2\}, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*; \times)$

b) $(E - \{0_2\}, \times)$ et $(\mathbb{C}^*; \times)$ sont isomorphes

et $(\mathbb{C}^*; \times)$ un groupe commutatif donc aussi

et on a $(E - \{0_2\}, \times)$ un groupe commutatif

4) La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $M_2(\mathbb{R})$ et E est une partie stable

de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$ donc La multiplication est

distributive par rapport à l'addition dans E

Donc on a :

$(E; +)$ est un groupe commutatif et

$(E - \{0_2\}, \times)$ un groupe commutatif

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Conclusion : $(E; +; \times)$ est un corps

Exercice 21: Soit $(A; +; \times)$ un anneau.

Et 1_A est l'élément neutre de $(A; \times)$

soient : $a \in A$ et $b \in A$ tels que :

a) $ab + ba = 1_A$

b) $a^2b + ba^2 = a$

1) montrer que : $a^2b = ba^2$

2) montrer que : $aba + aba = a$

3) en déduire que : $ab = ba$

Solution : 1) on a : $a^2b + ba^2 = a$

donc : $a^2b + ba^2 = a1_A$

donc : $a^2b + ba^2 = a(ab + ba)$

donc : $a^2b + ba^2 = a^2b + aba$

donc : $ba^2 = aba(1)$

et on a : $a^2b + ba^2 = a = 1_A a$

donc : $a^2b + ba^2 = (ab + ba)a$

donc : $a^2b + ba^2 = aba + ba^2$

donc : $a^2b = aba(2)$

de (1) et (2) en déduit que : $a^2b = ba^2$

2) d'après ce qui précède on a :

$ba^2 = aba$ et $a^2b = aba$

Donc : $aba + aba = a^2b + ba^2$ et d'après b) on a $aba + aba = a$

3) on a : $(ab)(ab) = abab = (aba)b = (ba^2)b$

$(ba)(ba) = baba = b(aba) = b(a^2b)$

(Car : $aba = a^2b$)

Et on a : $(ab)(ab) = (1_A - ba)(1_A - ba)$

$(ab)(ab) = 1_A - ba - ba + (ba)(ba)$

Donc : $ba^2b = 1_A - ba - ba + ba^2b$

Car : $(ab)(ab) = (ba)(ba) = ba^2b$

Donc : $ba + ba = 1_A$ et puisque : $ba + ab = 1_A$

Alors : $ab = ba$

Exercice22: Soit $(K; +; \times)$ un corps.

On note : 1_K l'élément neutre de $(K; \times)$

Soient x et y deux éléments de $K - \{0_K\}$

Qui vérifient les conditions suivantes :

a) $x + y = 1_K$ b) $x^{-1} + y^{-1} = 1_K$

avec : x^{-1} le symétrique de x pour la loi \times

1) montrer que : $xy = yx = -1_K$

2) montrer que : $x^4 + y^4 = 7.1_K$

Avec : $7.1_K = \underbrace{1_K + 1_K + \dots + 1_K}_{7 \text{ fois}}$

Solution : 1) Soient x et y deux éléments de

$K - \{0_K\}$ on a : $xy = x(x^{-1} + y^{-1})y$

$xy = xx^{-1}y + xy^{-1}y = y + x = -1_K$

Donc : $xy = yx = -1_K$

2) on a : $1_K = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$

$1_K = x^2 - 1_K - 1_K + y^2$

Donc : $x^2 + y^2 = 3.1_K$

Donc : $9.1_K = (x^2 + y^2)^2$

Donc : $9.1_K = x^4 + x^2y^2 + y^2x^2 + y^4$

Donc : $9.1_K = x^4 + 1_K + 1_K + y^4$

Donc : $x^4 + y^4 = 7.1_K$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

