

TD : L'ARITHMETIQUE : Exercices de rappels

Exercice1 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12) Déterminer dans \mathbb{Z} tous les diviseurs de -8

Exercice2 : 1) $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors a/c

b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors a/c

c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$

2) $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

Montrer que $a/19$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

Montrer que $d/13$

Exercice3 : $a \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} a/5x-7 \Rightarrow a/29 \\ a/2x+3 \end{cases}$

Exercice4 : Soient $a_n = 2n + 1$ et $b_n = 5n + 4$

1- Montrer que tout diviseur commun de a_n et b_n divise 3.

2- Déterminer tous les diviseurs communs de a_n et b_n

Exercice5 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$:

3 divise $4^n - 1$

Exercice6 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

Exercice7 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Exercice8 : Résoudre dans \mathbb{N}^2 les équations

suivantes : a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x > y$

b) $2xy + 2x + y = 99$

Exercice9 : déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 ($p \in \mathbb{N}$)

Exercice 10: n et a et b des entiers naturels
Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice11: $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$

si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

Exercice12: 1) Les nombres suivants sont-ils premiers : 499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2 + 3n$ $n \in \mathbb{N}$

Exercice 13 :

Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 3 ne peut pas être égale à 2.

Exercice 14 :

a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme $p = 6n + 1$ ou $p = 6n + 5$

Exercice15 : montrer que $\forall a \in \mathbb{Z} a \wedge (a+1) = 1$

Exercice16 : $n \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = n^2 + 3$ et $B = n + 2$

1) montrer que $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

Exercice 17:

1- Montrer que tout diviseur commun de : $a = 2n + 3$ et $b = 5n + 1$ est un diviseur de 13

2- Déterminer tous les diviseurs communs de a et b .

3- Déterminer les valeurs de n pour lesquels : $a \wedge b = 13$

Exercice 18: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Exercice19 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$
montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Exercice 20:

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer : $67 \wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u + 67v = 1$

Exercice21 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

1) $n \wedge (n+1) = 1$ 2) $n \wedge (2n+1) = 1$

3) $(2n+1) \wedge (3n+1) = 1$

Exercice22: $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19

Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1) $a+b$ 2) a^2+b^2 3) $2a-5b$

Exercice23 : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 10 du nombres 3^n

2) en déduire le chiffre des unités du nombres 2019^{2020}

3) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tel que : $3^n + 5n + 2 \equiv 0 [10]$

Exercice24 : 1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0 [n^2]$

2) montrer que: $7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 3 [10]$

Exercice 25 : 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 45872^{2018} par 9

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13

3) Montrer que pour tout n entier naturel :

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

4) Montrer que pour tout n entier naturel,

$5n^3 + n$ est divisible par 6

5) Montrer que si n n'est pas un multiple de 7,

alors : $n^6 - 1$ est un multiple de 7

6) Montrer que pour tout entier naturel, le nombre

$n(n^2 + 5)$ est divisible par 6

Exercice26 : $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$ On considère les

deux nombres : $a = 9x + 4y$ et $b = 2x + y$

1) montrer que $x \wedge y = a \wedge b$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$

a) montrer que $a \wedge b = b \wedge 7$

b) en déduire les valeurs possibles $a \wedge b = d$

c) montrer que : $n \equiv 4 [7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

d) en déduire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$

Exercice27: Résoudre les équations

suyvantes dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x = \bar{3}$ 2) $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$

3) $\overline{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Exercice28 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ l'équations

suyvants : $x + \bar{3}y = \bar{1}$

Exercice29 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ les

systeme suivants :
$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

Exercice30 : déterminer : $d = (-8316) \wedge 1080$

et $m = 8316 \vee 1080$

Exercice31: si $2 = a \wedge b$ et $-12 = a \times b$

déterminer : $a \vee b$

Exercice32: $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$ et $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les $a \vee b$ ($n \in \mathbb{N}$)

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs

et exercices

Que l'on devient un mathématicien

TD : d'ARITHMETIQUE : Exercices de rappels avec corrections

Exercice1 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12) Déterminer dans \mathbb{Z} tous les diviseurs de -8

Solution : 1) 156 a 12 diviseurs :

1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.

156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.

2) $D_{-8} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

Exercice2 : 1) $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors a/c

b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors a/c

c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$

2) $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

Montrer que $a/19$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

Montrer que $d/13$

Solution : 1) a) $\begin{cases} a/2b+c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2(b+c)-(2b+c) \Rightarrow a/c$

1) b) $\begin{cases} a/2b+3c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2b+3c-2(b+c) \Rightarrow a/c$

1) c) $\begin{cases} a/x-y \\ a/b-c \end{cases} \Rightarrow a/bx-by$ et $a/by-cy \Rightarrow a/bx-cy$

2) $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

$\Rightarrow a/12n+1$ et $a/-12n+18 \Rightarrow a/19$

$\Rightarrow a \in \{\pm 1; \pm 19\}$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

$\Rightarrow d/n^2+3$ et $d/(2n-1)^2 \Rightarrow d/4n^2+12$ et $d/4n^2-4n+1$

$\Rightarrow d/11+4n$ et $d/-2+4n \Rightarrow d/13$

Exercice3 : $a \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} a/5x-7 \\ a/2x+3 \end{cases} \Rightarrow a/29$

Solution : $\begin{cases} a/5x-7 \\ a/2x+3 \end{cases} \Rightarrow a/2(5x-7)-5(2x+3)$

$a/10x-14-10x-15 \Rightarrow a/-29 \Rightarrow a/29$

Exercice4 : Soient $a_n = 2n + 1$ et $b_n = 5n + 4$

1- Montrer que tout diviseur commun de a_n et b_n divise 3.

2- Déterminer tous les diviseurs communs de a_n et b_n

Exercice5 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$:

3 divise $4^n - 1$ **Solution :**

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$

1étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons

$4^0 - 1 = 0$ est un multiple de 3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit

vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$ donc

$4^n = 3k + 1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est

vraie. Montrons alors que :

$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 1 = 3k' \text{ ? ?}$

$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1$

$= 4 \times (3k + 1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$

avec $k' = 4k + 1$ Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; 4^n - 1$ est divisible par 9

Exercice6 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

Solution : $n+2/3n+1$ et $n+2/3n+2$

$n+2/3n+1$ et $n+2/3n+6$ donc

$n+2/(3n+6) - (3n+1)$ donc $n+2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5 donc Il faut que $n+2 \in \{-1; -5; 1; 5\}$ ce qui entraine que

$n \in \{-3; -7; -1; 3\}$

On vérifie que que que si $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$ alors $n+2/3n+1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$ sont : $-7 ; -3 ; -1 ; 3$

Exercice7 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Solution : Cette fraction a un sens si : $n+4 \neq 0$ soit $n \neq -4$ On constate que $3n+8 = 3(n+4) - 4$

$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si $n+4$ divise -4 .

Les diviseurs de -4 sont $1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4$.

Il faut que $n+4 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ ce qui

entraîne que $n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à $-8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0$ avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un

entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : $-8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0$.

Exercice8 : Résoudre dans \mathbb{N}^2 les équations suivantes : a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x > y$

b) $2xy + 2x + y = 99$

Solution : a) $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 32$

$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positif de 32

Et $(x-y) + (x+y) = 2x$ est un nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$S = \{(6; 2); (9; 7)\}$

b) $2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$

$\Leftrightarrow y(2x+1) + 2x+1 = 99+1 \Leftrightarrow (2x+1)(y+1) = 100$

Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positif de 100 : $D_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$S = \{(0; 99); (2; 19); (12; 3)\}$

Exercice9 : déterminer le nombre entier naturel n tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 ($p \in \mathbb{N}$)

Solution : $n \in \mathbb{N} : n = 25p + p^2$ et $0 \leq p^2 < 25$

donc $0 \leq p < 5$

Donc : $\begin{cases} p=0 \\ n=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=1 \\ n=26 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=2 \\ n=54 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=3 \\ n=84 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=4 \\ n=116 \end{cases}$

Donc : $n \in \{0; 26; 54; 84; 116\}$

Exercice 10 : n et a et b des entiers naturels
Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution : soit r le reste de la division euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc :

$n = aq + r$ et $0 \leq r < a-1$ et on a : $q = bq' + r'$

et $0 \leq r' < b-1$ donc on déduit que :

$n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$

Et puisque : $0 \leq r' < b-1$ et $0 \leq r < a-1$ alors : $ar' + r < ab-1$ donc $n = abq' + ar' + r$

$0 \leq ar' + r < ab-1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice11 : $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$

si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

Solution : soit r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b donc :

$a-1 = bq + r$ et $0 \leq r < b$

Donc : $ab^9 - b^9 = b^{10}q + rb^9$

Donc : $ab^9 - 1 = b^{10}q + rb^9 + b^9 - 1$

Donc : $ab^9 - 1 = b^{10}q + (r+1)b^9 - 1$

On montre que : $0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$???

On a : $0 \leq r < b$ donc $0 \leq r+1 \leq b$

donc $0 \leq (r+1)b^9 \leq b^{10}$ donc $0 \leq (r+1)b^9 - 1 \leq b^{10} - 1$

donc $0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$

conclusion : q est aussi le quotient de la

division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

b) L'inverse est-il vrai ?

Exercice12 : 1) Les nombres suivants sont-ils premiers : 499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2 + 3n$ $n \in \mathbb{N}$

Exercice 13 :

Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 3 ne peut pas être égale à 2.

Exercice 14 :

a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme $p = 6n + 1$ ou $p = 6n + 5$

Exercice 15 : montrer que $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

Solution : on pose $d = a \wedge (a+1)$

$$\Rightarrow d/a \text{ et } d/a+1 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

Exercice 16 : $n \in \mathbb{N}$ On considère les deux

nombre : $A = n^2 + 3$ et $B = n + 2$

1) montrer que $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

Solution : 1) on pose $d = A \wedge B$ et $d' = (n+2) \wedge 7$

On a : $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow d/A \text{ et } d/B \Rightarrow d/n^2+3 \text{ et } d/n+2$$

$$\Rightarrow d/n^2+3 \text{ et } d/n+2 \text{ on utilisant la division}$$

euclidienne : on trouve : $n^2 + 3 = (n+2)(n-2) + 7$

$$n^2 + 3 - (n+2)(n-2) = 7$$

$$\Rightarrow d/n^2+3 - (n+2)(n-2)$$

$$\Rightarrow d/7 \text{ et } d/n+2 \Rightarrow d/(n+2) \wedge 7 \Rightarrow d/d'$$

Inversement : On a : $d' = (n+2) \wedge 7$

$$\Rightarrow d'/n+2 \text{ et } d'/7 \Rightarrow d'/(n+2)(n-2) \text{ et } d'/7$$

$$\Rightarrow d'/(n+2)(n-2)+7 \text{ et } d'/7 \Rightarrow d'/n^2+3 \text{ et } d'/7$$

donc : $d'/A \wedge B$ donc d'/d

donc d'/d' et d'/d et $d \in \mathbb{N}$ et $d' \in \mathbb{N}$ donc

donc $d = d'$ donc : $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

$$2) \frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n+2/n^2+3 \text{ et on a : } n+2/n+2$$

$$\text{Donc : } n+2/A \wedge B \text{ Donc : } n+2/(n+2) \wedge 7$$

Donc : $n+2/7$ or 7 est premier donc :

Il faut que $n+2 \in \{1;7\}$ ce qui entraîne que $n=5$

Exercice 17:

1- Montrer que tout diviseur commun de :

$a = 2n + 3$ et $b = 5n + 1$ est un diviseur de 13

2- Déterminer tous les diviseurs communs

de a et b .

3- Déterminer les valeurs de n pour lesquels :

$$a \wedge b = 13$$

Exercice 18: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Solution : 1) on pose $\Delta_1 = a \wedge b$ et $\Delta_2 = b \wedge d$

On a : Δ_1/a et Δ_1/b donc Δ_1/a et Δ_1/bc donc

$\Delta_1/a - bc$ donc Δ_1/d

donc Δ_1/d et Δ_1/b donc $\Delta_1/b \wedge d$ donc Δ_1/Δ_2

inversement On a : Δ_2/b et Δ_2/d donc Δ_2/d et

Δ_2/bc donc $\Delta_2/bc + d$ donc Δ_2/a

donc Δ_2/a et Δ_2/b donc $\Delta_2/a \wedge b$ donc Δ_2/Δ_1

On a donc : Δ_1/Δ_2 et Δ_2/Δ_1 et $\Delta_1 \in \mathbb{N}$ et $\Delta_2 \in \mathbb{N}$

donc $\Delta_1 = \Delta_2$

donc : $a \wedge b = b \wedge d$

2) on a : $a = bc + (a - bc)$ si on prend : $d = a - bc$ et

d'après 1) on aura : $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

Exercice 19 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux

nombre : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$

montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Solution : 1) on pose $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow d/A \text{ et } d/B \Rightarrow d/35a+57 \text{ et } d/45a+76$$

$$\Rightarrow d/9(35a+57) \text{ et } d/7(45a+76)$$

$$\Rightarrow d/315a+513 \text{ et } d/315a+532$$

$$\Rightarrow d/19 \text{ or } 19 \text{ est premier donc :}$$

Il faut que $d \in \{1;19\}$ ce qui entraîne que :

$A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Exercice 20:

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer :

$$67 \wedge 39$$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel

$$\text{que : } 39u + 67v = 1$$

$$\text{Solution: 1) (1) } 67 = 1 \times 39 + \boxed{28} \quad \text{(2) } 39 = 1 \times 28 + \boxed{11}$$

$$\text{(3) } 28 = 2 \times 11 + \boxed{6} \quad \text{(4) } 11 = 1 \times 6 + \boxed{5}$$

$$\text{(5) } 6 = 1 \times 5 + \boxed{1} \quad \text{(6) } 5 = 1 \times 5 + \boxed{0}$$

Donc : $67 \wedge 39 = 1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

$$2) (5) \quad 6 = 1 \times 5 + 1 \Rightarrow 6 - 1 \times 5 = 1$$

$$\Rightarrow 6 - 1 \times (11 - 1 \times 6) = 1 \Rightarrow 2 \times 6 - 1 \times 11 = 1$$

$$\Rightarrow 2 \times (28 - 2 \times 11) - 1 \times 11 = 1 \Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times 11 = 1$$

$$\Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times (39 - 1 \times 28) = 1 \Rightarrow 7 \times 28 - 5 \times 39 = 1$$

$$\Rightarrow 7 \times (67 - 1 \times 39) - 5 \times 39 = 1 \Rightarrow 7 \times 67 - 12 \times 39 = 1$$

Exercice21 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

1) $n \wedge (n+1) = 1$ 2) $n \wedge (2n+1) = 1$

3) $(2n+1) \wedge (3n+1) = 1$

Exercice22: $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19

Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1) $a+b$ 2) a^2+b^2 3) $2a-5b$

Solution : 1) On a : $a \equiv 17[19]$ et $b \equiv 15[19]$

donc : $a+b \equiv 17+15[19] \Leftrightarrow a+b \equiv 13[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a+b$ Par 19 est : 13

2) $a \equiv 17[19] \Rightarrow a^2 \equiv 17^2[19] \Rightarrow a^2 \equiv 4[19]$

$b \equiv 15[19] \Rightarrow b^2 \equiv 15^2[19] \Rightarrow b^2 \equiv 16[19]$

Donc : $a^2+b^2 \equiv 4+16[19] \Leftrightarrow a^2+b^2 \equiv 1[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre a^2+b^2 Par 19 est : 1

3) $a \equiv 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 2 \times 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 15[19]$ (1)

$b \equiv 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 5 \times 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 18[19]$

Donc : $5b \equiv -1[19] \Rightarrow -5b \equiv 1[19]$ (2)

De (1) et (2) on déduit que :

$2a-5b \equiv 15+1[19] \Rightarrow 2a-5b \equiv 16[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $2a-5b$ Par 19 est : 16

Exercice23 : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 10 du nombres 3^n

2) en déduire le chiffre des unités du nombres 2019^{2020}

3) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tel que : $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10]$

Solution : 1) $3^n \equiv r[10]$ et $r \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

On a : $3^0 \equiv 1[10]$ et $3^1 \equiv 3[10]$ et $3^2 \equiv 9[10]$

et $3^3 \equiv 7[10]$ et $3^4 \equiv 1[10]$

Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 4k+r$ avec $r \in \{0;1;2;3\}$

On a : $3^4 \equiv 1[10]$ donc : $(3^4)^k \equiv 1^k[10]$

donc : $3^{4k} \equiv 1[10]$ et $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ et $3^{4k+2} \equiv 9[7]$

et $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est le reste dans la division du nombre 2019^{2020} Par 10

cad : on cherche r tel que : $2019^{2020} \equiv r[10]$??

On a : $2019 = 2010+9$ donc : $2019 \equiv 9[10]$

donc : $2019^{2020} \equiv 9^{2020}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4040}[10]$

or : $4040 = 4 \times 1010 = 4 \times k$

donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4k}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est 1

Autre méthode : $2019 \equiv 9[10]$

donc : $2019 \equiv -1[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

3) On Dresse une table comme suite :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
3^n	$\equiv 1[10]$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 9[10]$	$\equiv 7[10]$
$5n$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$
$3^n + 5n + 2$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 1[10]$	$\equiv 4[10]$

donc : $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10] \Leftrightarrow n = 3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice24 : 1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$

2) montrer que: $7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 3[10]$

Solution : 1) on a : $(n+2)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$ Donc :

$(n+2)^{n+2} = C_{n+2}^0 n^0 2^{n+2} + C_{n+2}^1 n^1 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$

$(n+2)^{n+2} = 2^{n+2} + (n+2)n2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$

Donc : $(n+2)^{n+2} = 2^{n+1}(2+n^2+2n) + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$

$(n+2)^{n+2} = 2^{n+1}(2+2n) + 2^{n+1}n^2 + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$

$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(1+n) = n^2 \left(2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k} \right)$

on a : $n^2 \left(2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k} \right) \equiv 0[n^2]$

donc : $(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$

2) on a : $7 \equiv 7[10]$ et $7^2 \equiv -1[10]$ donc $7^4 \equiv 1[10]$

Donc : $7^{4k} \equiv 1[10]$ et $7^{4k+1} \equiv 7[10]$ et $7^{4k+2} \equiv 9[10]$

$7^{4k+3} \equiv 3[10]$

On aussi : $7 \equiv 3[4]$ et $7^2 \equiv 1[4]$

Donc $7^{2k} \equiv 1[4]$ et $7^{2k+1} \equiv 3[4]$

Or : $7^{7^{7^7}} \equiv 1[2]$ (car impair)

Donc : $7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 3[10]$

Exercice 25 : 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 45872^{2018} par 9

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13

3) Montrer que pour tout n entier naturel : $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

4) Montrer que pour tout n entier naturel, $5n^3 + n$ est divisible par 6

5) Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors : $n^6 - 1$ est un multiple de 7

6) Montrer que pour tout entier naturel, le nombre $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6

Exercice 26 : $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$ On considère les deux nombres : $a = 9x + 4y$ et $b = 2x + y$

1) montrer que $x \wedge y = a \wedge b$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$

a) montrer que $a \wedge b = b \wedge 7$

b) en déduire les valeurs possibles $a \wedge b = d$

c) montrer que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

d) en déduire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$

Solution : 1) on pose $d = x \wedge y$ et $d' = a \wedge b$ montrons que : $d = d'$

$$d = x \wedge y \text{ donc : } \Rightarrow d/x \text{ et } d/y \Rightarrow d/a \text{ et } d/b$$

Car il divise toute combinaison de x et y

$$\Rightarrow d/a \wedge b \Rightarrow d/d'$$

Inversement :

$$d' = a \wedge b \Rightarrow d'/a \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/9x+4y \text{ et } d'/2x+y$$

$$\Rightarrow d'/(9x+4y) - 4(2x+y) \text{ et } d'/9(2x+y) - 2(9x+4y)$$

$$\Rightarrow d'/x \text{ et } d'/y \Rightarrow d'/x \wedge y \Rightarrow d'/d$$

ce qui entraîne: $d = d'$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$

a) montrons que $a \wedge b = b \wedge 7$?

la division euclidienne de $n^2 + 5n + 13$ par $n + 3$

$$\text{donne : } n^2 + 5n + 13 = (n + 3)(n + 2) + 7$$

$$\text{Donc : } a = b(n + 2) + 7 \Leftrightarrow a - b(n + 2) = 7$$

on pose $d' = b \wedge 7$ et $d = a \wedge b$

montrons que : $d = d'$

$$d = a \wedge b \Rightarrow d/a \text{ et } d/b \Rightarrow d/a - b(n + 2) \text{ et } d/b$$

$$\Rightarrow d/7 \text{ et } d/b \Rightarrow d/b \wedge 7 \Rightarrow d/d'$$

$$d' = b \wedge 7 \Rightarrow d'/7 \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/b(n + 2) + 7 \text{ et } d'/b$$

$$\Rightarrow d'/a \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/a \wedge b \Rightarrow d'/d$$

ce qui entraîne: $d = d'$

b) les valeurs possibles $a \wedge b = d$??

on a : $a \wedge b = b \wedge 7 = d$

donc : $d/7$ donc : $d = 1$ ou $d = 7$

c) montrons que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

$$n \equiv 4[7] \Leftrightarrow n + 3 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 7/n + 3 \Leftrightarrow 7/b \Leftrightarrow b \wedge 7 = 7 \Leftrightarrow b \wedge a = 7$$

d) les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$??

$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow n$ n'est pas congrue à 0 modulo 4

$n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 1[7]$ ou $n \equiv 2[7]$ ou $n \equiv 3[7]$ ou $n \equiv 5[7]$

ou $n \equiv 6[7]$

Exercice 27 : Résoudre les équations

suyvantes dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x = \bar{3}$ 2) $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$

3) $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Solution : On a : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}\}$

1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que

Cette équation n'admet pas de solutions

Donc : $S = \emptyset$

1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2 + \bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont solutions de l'équation

Donc : $S = \{\bar{0}; \bar{1}\}$

2) $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow \bar{1}x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Car : $2013 = 503 \times 4 + 1$

On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^3	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$x^3 + \bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Si $\bar{k} = \bar{0}$: $S = \{\bar{0}; \bar{2}\}$

Si $\bar{k} = \bar{1}$: $S = \{\bar{3}\}$

$$\text{Si } \bar{k} = \bar{2} : S = \emptyset$$

$$\text{Si } \bar{k} = \bar{3} : S = \{\bar{1}\}$$

Exercice28 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ l'équations

$$\text{suiivants : } x + \bar{3}y = \bar{1}$$

Solution : on Dresse une table des opérations de

$$\mathbb{Z} / 5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\} \text{ Comme suite}$$

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

$$S = \{(\bar{0}; \bar{2}); (\bar{1}; \bar{0}); (\bar{2}; \bar{3}); (\bar{3}; \bar{1}); (\bar{4}; \bar{3}); (\bar{4}; \bar{4})\}$$

Exercice29 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ les

$$\text{ystème suiivants : } \begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

Solution :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{3} + \bar{2})x + (\bar{2} + \bar{4})y = \bar{3} + \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \bar{4} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{1} \\ y = \bar{4} \end{cases} \text{ donc } S = \{(\bar{1}; \bar{4})\}$$

Exercice30 : déterminer : $d = (-8316) \wedge 1080$

$$\text{et } m = 8316 \vee 1080$$

Solution : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

$$\text{Donnent : } 8316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11 \text{ et}$$

$$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$$

$$d = 8316 \wedge 1080 = 2^2 \times 3^3 = 108 \text{ et}$$

$$m = 8316 \vee 1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 11880$$

Exercice31: si $2 = a \wedge b$ et $-12 = a \times b$

déterminer : $a \vee b$

Solution : on a $a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$

$$\text{donc : } a \vee b = |a \times b| / a \wedge b = |-12| / 2 = 6$$

Exercice32: $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$ et $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les $a \vee b$ ($n \in \mathbb{N}$)

Solution :

$$a = ((5^n)^2 - 1)((6^n)^2 - 1) = (5^n - 1)(5^n + 1)(6^n - 1)(6^n + 1)$$

$$a = b(5^n + 1)(6^n + 1) \text{ donc : } \frac{b}{a} \text{ donc : } a \vee b = a$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs

et exercices

Que l'on devient un mathématicien