

Feuilles d'exercices n ° 7 : Convergence de suites

Exercice

Donner un équivalent, le plus simple possible, de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{5n - n^2 + 2n^7}{n^8 - 3n + 12}$
2. $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$
3. $u_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$
4. $u_n = e^{-n} + e^{-2n}$
5. $u_n = \frac{2\sqrt{n} + e^{3n} - 5 \ln n}{n^2 - 3 \ln(2n^4)}$
6. $u_n = \frac{1}{n^2} + e^{-3n}$
7. $u_n = \ln \left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} \right)$
8. $u_n = \ln(1 + n^3)$
9. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$

Exercice

On considère la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. À l'aide de la question précédente, déterminer la limite de la suite (S_n) .
3. On pose désormais $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Démontrer à l'aide du théorème de convergence monotone que (u_n) converge.
4. En déduire un équivalent simple de S_n .

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2^n u_n$. On définit également la suite auxiliaire $v_n = \frac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$. Étudier la convergence de la suite (v_n) , puis en déduire un équivalent de la suite (u_n) .

Exercice

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. En déduire que l'équation $f(x) = na$ a une unique solution, notée x_n , pour tout entier n (ne cherchez pas à la calculer, vous n'y arriverez pas).
3. Expliquer pourquoi la suite (x_n) est croissante, et quelle est sa limite.
4. Déterminer un équivalent simple de x_n .

Exercice (d'après EML)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x + 2$ et une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (u_0 étant un réel quelconque).

1. Étudier les variations de la fonction f , et déterminer le nombre d'antécédents par f d'un réel m en fonction des valeurs de m . Résoudre en particulier $f(x) = -1$.
2. Montrer qu'il existe trois valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est stationnaire (c'est-à-dire qu'elle est constante à partir d'un certain rang).
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + 2 = (u_n + 2)^2$. En déduire la nature de la suite (u_n) selon la valeur de u_0 .

Exercice (d'après EDHEC)

On considère, pour tout entier naturel n , la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Étudier les variations de f_n .
2. Montrer que, $\forall n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $u_n \leq \frac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite (u_n) .
4. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent simple de $\frac{1}{n} - u_n$.

Exercice

Soit (u_n) une suite bornée. On introduit alors deux suites auxiliaires définies par $a_n = \max(u_0, u_1, \dots, u_n)$ et $b_n = \min(u_0, u_1, \dots, u_n)$.

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
2. Que peut-on dire de la suite (u_n) si elles ont la même limite ?
3. On pose désormais $c_n = \max(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{2n})$. Cette suite est-elle nécessairement convergente ?

Exercice

Soit (u_n) une suite convergeant vers une limite finie l . Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ (autrement dit, v_n est la moyenne des n premiers termes de la suite (u_n)) converge également vers l (commencez par le cas plus facile où $l = 0$, et revenez à la définition de la limite).

Et pour finir en beauté, deux (extraits de) sujets de concours, à peine retouchés (une ou deux questions que vous ne pouvez pas faire ont été supprimées).

EMLyon 1991, Exercice 2

$$\begin{aligned} \text{Soit } f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \end{aligned}$$

I. Etude de f .

1. Former le tableau de variation de f
2. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
(b) Résoudre l'équation $f(x) \leq x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
3. Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé d'unité 5cm, et préciser la position relative de (C) et de la première bissectrice (on ne cherchera pas d'éventuels points d'inflexion)

II. Etude d'une suite récurrente.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Que dire de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $u_0 = -1$ ou $u_0 = 0$?
2. On suppose ici $u_0 < -1$.
 - (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < -1$
 - (b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - (c) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on déterminera.
3. On suppose ici $-1 < u_0 < 0$.
Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
4. On suppose ici $u_0 > 0$.
Sans en donner de démonstration, quel résultat obtiendrait-on concernant la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans ce cas ?

Maths III HEC/ESCP 2002, Parties A et B du problème

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on définit la suite $u \times v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Partie A : Exemples

1. Premiers exemples

Pour tout entier naturel n , calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

- (a) pour tout entier naturel n , $u_n = 2$ et $v_n = 3$.
- (b) pour tout entier naturel n , $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

2. Programmation

Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$.

Écrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n , qui calcule et affiche les valeurs w_0, w_1, \dots, w_n .

3. Un résultat de convergence

Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

(a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité :

$$\sum_{k=n+1}^m u_k \leq u_n$$

(b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :

$$w_{2n} \leq v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leq v_0 u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 u_n$$

(c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(d) Soit u' la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u'_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \times v$ est convergente et de limite nulle.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A .

2. Soit $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

(a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$.

(a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Pour tout entier naturel n , établir l'égalité : $\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.

Que peut-on en déduire pour les suites $b \times c$ et a ?

(c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = c_n - \ell$ et d la suite $b \times \varepsilon$.

En utilisant le résultat de la question 3. de la Partie 1, montrer que la suite d converge vers 0.

(d) Pour tout entier naturel n , établir l'égalité : $d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Feuilles d'exercices n°7 : corrigé

Exercice 1 (*)

1. $\frac{5n - n^2 + 2n^7}{n^8 - 3n + 12} \sim \frac{2n^7}{n^8} \sim \frac{2}{n}$
2. $\sqrt{n+3} - \sqrt{n} = \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{3}{n}} + 1)} \sim \frac{3}{2\sqrt{n}}$
3. $\frac{n^2}{\sqrt{n^2+n+1}} \sim \frac{n^2}{n} \sim n$
4. $e^{-n} + e^{-2n} \sim e^{-n}$
5. $\frac{2\sqrt{n} + e^{3n} - 5 \ln n}{n^2 - 3 \ln(2n^4)} \sim \frac{e^{3n}}{n^2}$
6. $\frac{1}{n^2} + e^{-3n} \sim \frac{1}{n^2}$
7. $\ln\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$
8. $\ln(1+n^3) \sim n^3$
9. $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$. Or $n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim n \times \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$. On ne peut pas passer cet équivalent à l'exponentielle, mais on peut en déduire que la suite (u_n) tend vers 1 (ce qui est dans l'exponentielle tend vers 0), donc $u_n \sim 1$.

Exercice 2 (**)

1. En effet, $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2(n+1-n)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Or, comme $\sqrt{n} + \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}$, on a $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, d'où l'encadrement souhaité en multipliant tout par 2.
2. En utilisant l'inégalité de droite de la question précédente, on obtient $2 \sum_{k=1}^{k=n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq S_n$.
Or, la somme de gauche est une somme télescopique égale à $2(\sqrt{n+1} - 1) = 2\sqrt{n+1} - 2$. Cette expression a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ (inutile d'utiliser l'inégalité de gauche de la question 1 ici, celle de droite suffit...).
3. Commençons par déterminer la monotonie de la suite (u_n) : $u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - S_n - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, expression négative d'après la question 1. La suite (u_n) est donc décroissante. On a vu par ailleurs que $S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$, donc a fortiori $S_n \geq 2\sqrt{n} - 2$, donc $u_n \geq -2$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.

4. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - 2\sqrt{n} = l \in \mathbb{R}$, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n - 2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$.
Autrement dit, on a prouvé que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 3 (**)

Cherchons donc à exprimer v_{n+1} en fonction de v_n : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2} = \frac{2^n u_n}{2 \cdot 2^{\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}}} = \frac{u_n}{2^{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}} = \frac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = v_n$. La suite (v_n) est donc tout simplement constante, égale à $v_0 = u_0 = 1$, donc $u_n = v_n \times 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exercice 4 (**)

1. La fonction f est somme de deux fonctions strictement croissantes, donc elle-même strictement croissante donc injective. De plus, un calcul très simple donne $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, donc f est surjective, donc bijective de \mathbb{R}^* sur \mathbb{R} .
2. L'entier n étant un réel comme un autre, il a un unique antécédent par la fonction bijective f , ce qui signifie bien que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution.
3. Par définition, $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n + 1$. Or, la fonction f est croissante et on a bien sûr $n < n + 1$. Il s'ensuit que $x_n < x_{n+1}$, et donc que la suite (x_n) est strictement croissante. Pour prouver que la suite tend vers $+\infty$ (ce qui est intuitivement assez clair), on peut constater que $f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} + \ln \frac{n}{2} < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n = f(x_n)$, donc $\frac{n}{2} < x_n$, et le théorème de comparaison donne la limite de la suite.
4. Comme la suite tend vers $+\infty$, on peut dire que $\ln(x_n) = o(x_n)$. Or, on sait que $f(x_n) = x_n + \ln(x_n) = n$, donc $x_n + o(x_n) = n$. Cela signifie que $x_n \sim n$.

Exercice 5 (d'après EML) (**)

1. Étudier une fonction de second degré ne devrait pas poser trop de problème : $f'(x) = 2x + 4$ s'annule en -2 , la fonction est donc strictement décroissante sur $] -\infty; -2]$ et strictement croissante sur $[-2; +\infty[$. Comme $f(-2) = -2$, on en déduit que tous les réels strictement supérieurs à -2 ont deux antécédents par f , tous ceux strictement inférieurs à -2 n'ont pas d'antécédent, et -2 a un unique antécédent, à savoir -2 . En particulier, $f(x) = -1$ équivaut à $x^2 + 4x + 3 = 0$, équation dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$, et qui admet donc deux solutions $x_1 = \frac{-4 - 2}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-4 + 2}{2} = -1$.
2. Si la suite est stationnaire, c'est qu'il existe une valeur de n à partir de laquelle les termes sont constants, et en particulier pour laquelle $u_n = u_{n+1}$, donc $u_n = f(u_n)$. Or, $f(x) = x \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$, équation qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et pour solutions $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$ (on savait déjà que ces deux valeurs étaient solutions de l'équation après les calculs de la première question). Conclusion, on a nécessairement $u_n = -2$ ou $u_n = -1$. Mais comme $u_n = f(u_{n-1})$, u_{n-1} doit être un antécédent de -2 ou de -1 , c'est-à-dire être égal à -2 , -3 ou -1 (toujours d'après la question précédente). Mais alors u_{n-2} doit lui-même être un antécédent de -1 ou de -2 (pour -3 il n'y a pas d'antécédent) donc égal à -1 , -2 ou -3 etc ; jusqu'à être remonté à u_0 . Pour rédiger ce raisonnement de façon rigoureuse, deux solutions : soit on fait une récurrence descendente (on part de u_n pour revenir à u_0 , un peu inhabituel), soit on fait une récurrence classique visant à montrer que, si $u_0 \notin \{-3; -2; -1\}$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-3; -2; -1\}$, ce qui prouve que, si u_0 n'est pas une des trois valeurs en question, la suite

n'est pas stationnaire. Autrement dit, on prouve la contraposée de ce qui est demandé dans cette question. La récurrence ne pose pas de problème particulier, et les trois valeurs initiales pour lesquelles la suite stationne sont donc -1 (suite constante égale à -1), -2 (suite constante égale à -2) et -3 (suite stationnaire à -1 à partir du rang 1).

3. C'est un calcul tout bête : $u_{n+1} + 2 = f(u_n) + 2 = u_n^2 + 4u_n + 2 + 2 = (u_n + 2)^2$. Posons $v_n = u_n + 2$ pour plus de clarté, on a donc $v_{n+1} = v_n^2$. La suite (v_n) prend donc des valeurs positives à partir de v_1 , et une récurrence simple montre que, si $v_1 > 1$, alors (v_n) ne prend que des valeurs supérieures à 1 et sera strictement croissante ; au contraire, si $v_1 < 1$, alors v_n sera toujours inférieur à 1 et la suite sera strictement décroissante. Dans ce deuxième cas, (v_n) est décroissante minorée, donc converge vers un réel l vérifiant $l = l^2$, donc égal à 0 ou 1. Comme $v_n \leq v_1 < 1$, on en déduit que (v_n) converge vers 0. Par contre, si $v_1 > 1$, la suite ne peut pas converger vers 0 ou 1 ; étant croissante elle diverge donc vers $+\infty$. On aura $v_1 < 1$ si $v_0^2 < 1$, c'est-à-dire si $v_0 \in]-1; 1[$

Ne reste plus qu'à revenir à $u_n = v_n - 2$. Si $u_0 \in]-3; -1[$, $v_0 \in]-1; 1[$, donc la suite (v_n) converge vers 0, et (u_n) converge vers -2 . Si $u_0 = -3$ ou $u_0 = -1$, on a déjà vu que la suite était stationnaire. Enfin, si $u_0 < -3$ ou $u_0 > -1$, on aura $v_1 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 6 (d'après EDHEC) (***)

- Calculons donc la dérivée $f'_n(x) = 5x^4 + n$. Cette dérivée est toujours strictement positive (sauf en 0 pour $n = 0$), la fonction est donc strictement croissante, quel que soit l'entier n .
- Comme de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, chaque fonction f_n est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Chaque réel a donc un unique antécédent par f_n et en particulier l'équation $f_n(n) = 0$ admet une unique solution.
- Constatons que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} + 1 - 1 = \frac{1}{n^5} > 0$. Comme la fonction f_n est strictement croissante, et $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que $u_n < \frac{1}{n}$. Notons par ailleurs que $f_n(0) = -1$, donc par un raisonnement similaire on a toujours $0 < u_n$. Le théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- On sait que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$, donc $u_n = \frac{1}{n} - \frac{u_n^5}{n}$. Comme (u_n) tend vers 0, $\frac{u_n^5}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $u_n \sim \frac{1}{n}$.
- Comme on vient de le voir, $\frac{1}{n} - u_n = \frac{u_n^5}{n} \sim \frac{1}{n^5} \sim \frac{1}{n^6}$.

Exercice 7 (***)

- La suite (a_n) est croissante (en effet, le plus grand des $n + 1$ premiers termes de la suite est nécessairement plus grand que le plus grand des n premiers) et majorée par n'importe quel majorant de (u_n) , donc elle converge. De même, (b_n) est décroissante et minorée par les minorants de (u_n) donc converge également.
- On a assez clairement $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq b_n$. Si jamais il existe un entier n_0 pour lequel $a_{n_0} > b_{n_0}$, alors on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq a_{n_0}$ (puisque la suite est croissante), et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq b_{n_0}$, donc les deux suites auront des limites distinctes. Autrement dit, pour que les suites aient la même limite, on doit avoir $a_n = b_n$ pour tout entier n , c'est-à-dire que le maximum et le minimum des n premiers termes de la suite (u_n) sont toujours égaux. Ceci n'est possible que si tous ces termes sont égaux entre eux, c'est-à-dire quand (u_n) est une suite constante.

3. La suite (c_n) n'est pas toujours convergente, même lorsque (u_n) est bornée. Prenons par exemple la suite (u_n) qui vaut 1 lorsque n est une puissance de 10 et 0 sinon (autrement dit $u_{10} = u_{100} = u_{1000} = \dots = 1$ et tous les autres termes sont nuls). Si l'on regarde la suite (c_n) , elle est constituée de termes valant tous 0 et 1, mais n'est pas stationnaire (on a par exemple $c_{10^k} = 1$ mais $c_{10^{k+1}} = 0$ car il n'y a pas de puissance de 10 entre $10^k + 1$ et $2(10^k + 1)$), donc ne peut pas converger.

Exercice 8 (****)

Supposons donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, et choisissons un $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 à partir duquel on aura $|u_n| < \varepsilon$. Découpons alors v_n en deux parties : ce qui se passe avant n_0 et après n_0 : si $n > n_0$, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n_0} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{k=n} u_k$. La première somme est une constante (on peut modifier n , mais n_0 , lui, est fixé), donc, quand on la divise par n , ça va finir par se rapprocher de 0. Autrement dit, $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{k=n_0} u_k \right| < \varepsilon$. Quand à la deuxième somme, elle est constituée de $n - n_0$ termes qui sont tous inférieurs (en valeur absolue) à ε , donc sa valeur absolue est inférieure à $(n - n_0)\varepsilon$, d'où $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=n_0+1}^{k=n} u_k \right| \leq \frac{n - n_0}{n} \varepsilon \leq \varepsilon$ (puisque $\frac{n - n_0}{n} \leq 1$). Conclusion, lorsque $n \geq \max(n_0; n_1)$, on a $|v_n| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Ceci suffit à prouver que la suite (v_n) tend vers 0, et a donc bien la même limite que (u_n) .

Passons désormais au cas général (qui va être facile en fait), c'est à dire lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \neq 0$. Posons $w_n = u_n - l$, cette suite auxiliaire a pour limite 0, donc on peut lui appliquer ce qu'on vient de démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} w_k = 0$. Or, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} w_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (u_k - l) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} u_k - nl \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} u_k \right) - l$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} u_k = l$, ce qu'on voulait prouver. Note finale : ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cesaro, il stipule que la moyenne des n premiers termes d'une suite convergente a la même limite que la suite elle-même.

EMLyon 1991, Exercice 2 (**)

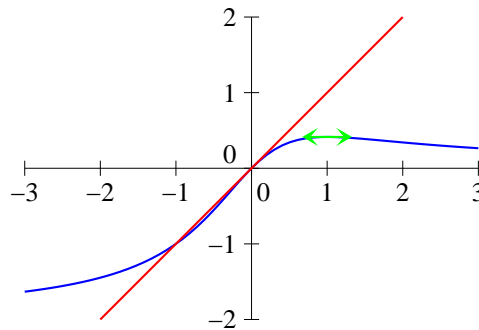
I. Etude de f.

1. La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x(x+1)}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - x(x+1)}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 - x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. Elle admet un minimum global pour $x = 1$, de valeur $f(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$. De plus, on a $f(x) = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} - 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - 1 = 0$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 - 1 = -2$ (rappelons au cas où que $\frac{x}{|x|}$ est égal à 1 si x est positif, et à -1 si x est négatif). D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		$\sqrt{2}-1$	0

\swarrow \searrow
 -2

2. (a) Si $f(x) = x$, on peut écrire $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = x+1$, ou encore $(x+1)(\sqrt{x^2+1}-1) = 0$. on a donc soit $x+1 = 0$, c'est-à-dire $x = -1$, soit $\sqrt{x^2+1} = 1$, ce qu'on peut élever au carré pour obtenir $x^2+1 = 1$, d'où $x^2 = 0$. On a finalement deux solutions à l'équation $f(x) = x$: $\mathcal{S} = \{-1; 0\}$.
- (b) En reprenant le calcul précédent, il faut déterminer le signe de $(x+1)(\sqrt{x^2+1}-1)$. Comme $x^2+1 \geq 1$ pour tout réel, $\sqrt{x^2+1}-1 \geq 0$, donc seul le signe de $x+1$ importe. On obtient que $f(x) \leq x$ sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.
3. Voici une allure de la courbe, ainsi que la première bissectrice :



II. Etude d'une suite récurrente.

1. Ces deux valeurs vérifiant $f(x) = x$, la suite sera constante égale à -1 ou 0 respectivement (on peut faire une récurrence très facile si on tient à faire une preuve très rigoureuse).
2. (a) Prouvons par récurrence la propriété $P_n : u_n < -1$. Par hypothèse, P_0 est vraie, et si on suppose P_n vérifiée, on a donc $u_n < -1$, et d'après le tableau de variations de la fonction f , $f(u_n) < f(-1) = -1$, donc $u_{n+1} = f(u_n) < -1$. Ceci prouve P_{n+1} et achève la récurrence.
- (b) On a vu plus haut que $\forall x < -1, f(x) > x$, donc $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ si $u_n < -1$ comme on vient de le prouver. Conclusion : la suite (u_n) est strictement croissante.
- (c) La suite est croissante et majorée par -1 , elle converge donc. Comme nous avons affaire à suite récurrente et que f est continue, sa limite l vérifie $f(l) = l$, donc ne peut être égale qu'à -1 ou 0 . Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < -1$, on aura nécessairement $l \leq -1$, donc la suite (u_n) converge vers -1 .
3. Le raisonnement est très similaire à celui de la question précédente. Commençons par prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n < 0$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si on le suppose vérifié pour u_n , alors (toujours en utilisant le tableau de variations de f), $f(-1) < f(u_n) < f(0)$, c'est-à-dire que $-1 < u_{n+1} < 0$, ce qui achève la récurrence.
- On constate ensuite que, comme $f(x) - x < 0$ sur l'intervalle $] -1; 0[$, la suite (u_n) sera strictement décroissante. Étant minorée par -1 , elle converge donc vers une limite l' . Comme la suite est décroissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0$, donc par passage à la limite $l \leq u_0 < 0$. La suite (u_n) converge donc vers 1 .
4. C'est toujours le même principe : la suite ne prendra que des valeurs strictement positives, et sera décroissante, donc converge, et la limite ne peut être que 0 .

Maths III HEC/ESCP 2002, Parties A et B du problème (***)

Partie A : Exemples

1. (a) On a dans ce cas $w_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2 \times 3 = 6(n+1)$.

(b) Dans ce deuxième exemple $w_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k =$
 $3^n \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3^{n+1} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

2. PROGRAM suites ;

USES wincrt ;

VAR i,j,n : integer ; w : real ;

BEGIN

WriteLn('Choisissez l'entier n') ;

readLn(n) ;

FOR i := 0 TO n DO

BEGIN

w := 0 ;

FOR j := 0 TO i DO w := w+ln(j+1)/(i-j+1) ;

END ;

END.

3. Un résultat de convergence

Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

(a) On calcule $\sum_{k=n+1}^{k=m} u_k = \sum_{k=n+1}^{k=m} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^{n+1+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{1 - \frac{1}{2}} =$
 $\frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n} = u_n$, donc l'inégalité demandée est vraie.

(b) Il s'agit « simplement » de découper la somme constituant w_{2n} en morceaux et de faire

les bonnes majorations : $w_n = \sum_{k=0}^{k=2n} u_k v_{2n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k v_{2n-k} + u_{2n} v_0$.

La première somme est égale à $u_0 v_{2n} + u_1 v_{2n-1} + \dots + u_n v_n$. Comme la suite (v_n) est supposée décroissante et que tous les termes de (u_n) sont positifs, elle est inférieure ou

égale à $(u_0 + u_1 + \dots + u_n) v_n = u_0 v_n + v_n \sum_{k=1}^{k=n} u_k \leq u_0 v_n + u_0 v_n = 2v_n$ (cette dernière inégalité découle de la question précédente). De même, en utilisant la décroissance de (v_n) ,

la deuxième somme est inférieure ou égale à $v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k \leq v_1 u_n$ (toujours d'après la

question précédent. En additionnant ces majorations, on obtient bien $w_{2n} \leq 2v_n + v_1 u_n + v_0 u_{2n}$.

La deuxième majoration est du même style : $w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k v_{2n+1-k} +$

$$u_{2n+1}v_0 \leq v_{n+1}u_0 + v_{n+1}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) + v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k + u_{2n+1}v_0 \leq 2v_{n+1} + v_1u_n + v_0u_{2n+1}.$$

- (c) Les deux suites (u_n) et (v_n) ont pour limite 0 (pour (v_n) , ça fait partie des hypothèses, et pour (u_n) c'est une conséquence du fait qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$). On en déduit aisément que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_0u_{2n} + 2v_n + v_1u_n = 0$, et pareil pour $2v_{n+1} + v_1u_n + v_0u_{2n+1}$. Comme de plus tous les termes de la suite (w_n) sont positifs (ils sont constitués d'une somme de réels positifs), le théorème des gendarmes permet de dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_{2n+1} = 0$. Autrement dit, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 à partir duquel tous les termes pairs de la suite sont inférieurs à ε , et un entier n_1 à partir duquel tous les termes impairs aussi. Quand n est plus grand que le plus grand de ces deux entiers, tous les termes de la suite deviennent donc inférieurs à ε , ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

- (d) D'après l'inégalité triangulaire, on aura $0 \leq |(u' \times v)_n| = \left| \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{k=n} \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k} \right| = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k} v_{n-k} = w_n$. Comme on vient de voir que la suite (w_n) convergeait vers 0, le théorème des gendarmes nous donne la convergence de $(|u' \times v|)$, et donc de $(u' \times v)$, vers 0.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

- Si (u_n) est une suite décroissante, on a $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \geq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n \geq a_{n+1}$, donc la suite appartient effectivement à A . Au contraire, si (u_n) est strictement croissante, on aura toujours $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) < u_n < u_{n+1}$, donc la suite n'appartient pas à A .
- La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, donc elle admet deux racines $r = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ et $s = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. Le terme général de la suite est donc bien de la forme $z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
 - La suite définie par $u_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, par exemple, appartient à A (elle vérifie la récurrence linéaire de la question précédente, et on vérifie facilement que ses termes sont tous positifs), mais n'est pas monotone puisque les termes d'indices pairs de la suites sont plus grands que 1 et les termes d'indices impairs plus petits que 1.
- Calculons donc, pour $n \geq 1$, $c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n+1} - \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \leq 0$ puisque $(a_n) \in A$. La suite (c_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs constituée de termes positifs (puisque c'est le cas de (a_n)), elle est minorée, donc elle converge.
 - Il semble assez naturel de procéder à une récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité stipule que $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 c_0 = a_0$, ce qui est effectivement vrai. Supposons désormais l'égalité vérifiée au rang n , alors $\sum_{k=0}^{k=n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} c_{n-k} = c_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1} +$

$\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$, et la récurrence achevée. Ce calcul prouve que les suites $b \times c$ et a sont tout simplement identiques.

(c) La suite (u_n) convergeant vers l , la suite ε a pour limite 0. De plus, elle est décroissante à partir du rang 1 tout comme (u_n) , donc tous ses termes sont positifs (sinon elle ne pourrait pas converger vers 0). Elle vérifie donc les hypothèses faites sur la suite (v_n) dans la partie précédente, et on peut en conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$.

(d) Ce n'est pas si dur que ça en a l'air : $d_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k} - l) = \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - l \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = a_n - l \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = a_n + \frac{3}{2}l \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. On peut également écrire que $a_n = d_n + \frac{3}{2}l \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

La toute dernière question est un simple calcul de limite : on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$, et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ (suite géométrique), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}l$.