Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1) $P:"\forall x\in\mathbb{R}/x^2>0"$
2) $P:"\exists x\in\mathbb{R}/x^2-2=0"$
3) $P:x\in[1;2[$
4) $P:"\ \forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$
5) $P:(\forall x\in\mathbb{R});-1\le\cos x\le1$
6) $P:(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n\prec m$
7) $P:(\exists n\in\mathbb{N})\ 2n+1$ est pair
8) $P:(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$
9) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y-x>0$
10) $P:(\exists!x\in\mathbb{R});2x+4=0$
11) $P:(\exists!x\in\mathbb{R});x^2=2$
12) $P:(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$
13) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y^2=x$

Exercice 2 Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.

6; Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Exercice 3 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $\begin{cases}0\le x\prec2\\0\le y\prec2\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\succ1$

Exercice 4 : $x\in\mathbb{R}^+$ Montrer que :

$\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow x=0$

Exercice 5 : 1) Montrer que :

$(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):a^2+b^2=0\Rightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}^+$ et $y\in\mathbb{R}^+$ Montrer que:

$x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

Exercice 6 : Montrer que :

$(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):a^2+b^2=1\Rightarrow|a+b|\le\sqrt{2}$

Exercice 7 : Montrer que si $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$ alors $a+b\in\mathbb{Q}$

Exercice 8 : on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par :

$f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ Montrer que :

$|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\le|f(x)-f(1)|\le\frac{1}{2}|x-1|$

Exercice 9 : Montrer que : $n\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

Exercice 10 : Montrer que pour tout

$\forall x\in[-2;2]:2\sqrt{2}\succ\sqrt{4-x^2}$.

Exercice 11: Montrer que pour tout

$\forall x\in\mathbb{R}:|x-1|\le x^2-x+1$.

Exercice 12 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E):

$1-\frac{x}{4}\succ\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Exercice 13 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1):

$|x-1|+2x-3\ge0$

Exercice 14 : Montrer que pour tout

$\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+x\succ0$.

Exercice 15 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1):

$x^2-|x-2|+5=0$

Exercice 16 : Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 17 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\neq2$ et $y\neq2\Rightarrow2x+2y-xy-2\neq2$

Exercice 18 : $x\in\mathbb{R}$ et $x\neq-5$

Montrer que : $x\neq-8\Rightarrow\frac{x+2}{x+5}\neq2$

Exercice 19 : Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 20 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\neq y\Rightarrow(x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$

Exercice 21 : Soit $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$

Montrer que $n\times p$ est pair ou n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Exercice 22 : Soient $a\succ0$ et $b\succ0$ Montrer que si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Exercice 23 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq M$

Exercice 24 : Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 25 : (Contraposée ou absurde)

Soient $a;b \in \mathbb{Q}$

1)Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0 \Rightarrow a=b=0$

2)en déduire que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2} \Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Exercice 26 : (absurde)

On considère l'ensemble : $A=\{1;2;3;4;...;n\}$ avec n un nombre entier impair

Et soient x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ;… ; x_n des éléments de l'ensemble A distincts deux a deux

Montrer que : $\exists i \in A /\ x_i - i$ est pair

Exercice 27 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in [0;1]): x^2 \geq x$ est fausse :

Exercice 28 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}): x^2+y^2 \geq x+y$ est fausse :

Exercice 29 : Montrer que La proposition $P:(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2): \sqrt{a^2+b^2}=a+b$ est fausse :

Exercice 30 : Montrer que La proposition suivante est fausse :

« Tout entier positif est somme de trois carrés »

(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple $6=1^2+1^2+2^2$.)

Exercice 31 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in \mathbb{R}^*): x+\frac{1}{x} \geq 2$ est fausse :

Exercice 32 : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-x+3$ Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Exercice 33 : Montrer que La proposition $P:\forall (a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} a \neq b \\ c \neq d \end{cases} \Rightarrow a+c \neq b+d$ est fausse :

Exercice 34 : Montrer que La proposition $P:(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}): x^2-xy+y^2=0$ est fausse

Exercice 35 : $\forall x > 0 \quad x+\frac{1}{x} \geq 2$

Exercice 36 : soit $x \in \mathbb{R}$ Montrer que :

$|x-1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$

Exercice 37 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E):

$\sqrt{x^2+1}=2x$

Exercice 38 : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $|x-y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Exercice 39 : 1) Montrer que :

$\left(\forall (a;b) \in (\mathbb{R}^+)^2\right): a+b=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ Montrer que:

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

Exercice 40 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$.

Exercice 41 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$.

Exercice 42 : Montrer par récurrence que :pour tout entier $n \geq 5$: $2^n \geq 6n$

Exercice 43 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; n^3+2n$ est divisible par 3

Exercice 44 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$.

Exercice 45 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$.

Exercice 46 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$.

Exercice 47 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 4^n+6n-1$ est divisible par 9

Exercice 48 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 7^n-1$ est divisible par 6

Erreur classique dans les récurrences

Exercice 49 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :

P (n) : 10^n-1 est divisible par 9

Q (n) : 10n + 1 est divisible par 9

1) Démontrer que si P (n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.

2) Démontrer que si Q (n) est vraie alors Q (n + 1) est vraie.

3) Un élève affirme : " Donc P (n) et Q (n) sont vraies pour tout entier naturel n.

Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.

4) Démontrer que P (n) est vraie pour tout entier naturel n.

5) Démontrer que Q (n) est fausse pour tout entier naturel n.

On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exercice 50 : Soit P(n) la propriété dénie sur $\mathbb{N}$ par : 7^n-1 Est divisible par 3

1) Démontrer que si P(n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.

2) Que peut-on conclure

Exercice 51 : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tel que : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[$ Montrer que : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec 1$

Exercice 52 : Traduisez les propositions suivantes en langage courant puis déterminer sa négation et la valeur de vérité :

1) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):x>y$
2) $P:(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):x>y$
3) $P:(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 4\Rightarrow x\geq 2$
4) $P:(\exists x\in\mathbb{R});x^2=4$
5) $P:(\forall\varepsilon\succ 0);\left(\exists x\in\left\{1+\dfrac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\ x\prec\varepsilon+10$

Exercice 53 : A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formules $P ou \overline{P}$ est une tautologies.

Exercice 54 : 1. (Raisonnement direct) Soient $a\in\mathbb{R}^+;b\in\mathbb{R}^+$

Montrer que si $a\leq b$ alors $a\leq\dfrac{a+b}{2}\leq b$ et $0\leq\sqrt{ab}\leq b$

2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $\forall n\in\mathbb{N};n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

4. (Absurde) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $x<2\Rightarrow x^2<4$?

6. (Récurrence) Fixons un réel $a\in\mathbb{R}^{+*}$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};(1+a)^n\geq 1+n\times a$.

<u>Autre exercices</u>

Exercice 1 : P, Q des propositions ; Ecrire la négation des propositions suivantes :
1. Toutes les voitures rapides sont rouges ;
2. Tout triangle rectangle possède un angle droit
3. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens
4. Pour tout entier x il existe un entier y tel que pour tout entier z la relation z < y implique la relation z < x + 1.
5. il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir
6. a) (P *et* Q) b) (*non* P *et non* Q) c) ($P\Rightarrow Q$)

Exercice 2 : Supposons que les chiens aboient et que la caravane passe. Traduisez les propositions suivantes En langage propositionnel. On note p : les chiens aboient et q : la caravane passe.
a) Si la caravane passe, alors les chiens aboient.
b) Les chiens n'aboient pas.
c) La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
d) Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Exercice 3 : Démontrer les énoncés suivants par récurrence :

1) $\forall n\in\mathbb{N}\quad n^3-n$ est divisible par 6
2) $\forall n\in\mathbb{N}\quad n^5-n$ est divisible par 30
3) $\forall n\in\mathbb{N}\quad n^7-n$ est divisible par 42

Exercice 4 : Déterminer les valeurs de vérité des propositions suivantes :
1. (3 est un nombre impair) ⇒ (6 est un nombre premier)
2. ($\sqrt{2}$ est un nombre irrationnelle) ⇒ [$(\forall x\in\mathbb{R})\ (1+2x<x^2)$]
3. (5 est positif) ⇒ (3 divise 18)

Exercice 5 :
1)Donner une condition nécessaire et pas suffisante pour :
a) $x\in[1,2]$
b) n divise 6
2)Donner une condition suffisante et pas nécessaire pour :
a) $x\in[1,2]$
b) n divise 6.

Exercice 6 : Etudier la vérité des propositions suivantes :
1. $\forall x\in\mathbb{R}:2x^2+x+3\succ 0$
2. $\forall(a;b)\in\mathbb{Q}^{*2}:a\sqrt{2}+b\neq 0$
3. $\forall n\in\mathbb{N}^*:\dfrac{n+1}{n}\notin\mathbb{N}$

Exercice 7 : écrire la négation des propositions suivantes

$Q;(\exists x\in\mathbb{R}):x<2\Rightarrow x^2\geq 2019$

$P;(\forall x\in\mathbb{R}):x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$

Exercice 8 : Écrire à l'aide des Quantificateurs la phrase suivante :
1) « Pour tout nombre réel, son carré est positif ».
2) « Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 ».
3)« Pour tout entier n, il existe un unique réel x tel que $x\succ n$ ».

Exercice 9 : Ecrire avec des Quantificateurs les propositions suivantes puis dans chaque cas dire si la proposition est vraie ou fausse.
1)Tout entier naturel est pair ou impair.
2)Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.

Exercice 10 : En utilisant le raisonnement par contraposé montrer que :

si $x\in\left]1:+\infty\right[$ et $y\in\left]1:+\infty\right[$

$x\neq y\Rightarrow x^2-3x\neq y^2-3y$

Exercice 11 : Etudier la vérité des propositions suivantes :
1. $\exists x\in\mathbb{R}:\left|x^2-x\right|+3x=0$
2. $\exists x\succ 0:x^2+3x=0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1) $P:"\forall x\in\mathbb{R}/x^2>0"$
2) $P:$ $"\exists x\in\mathbb{R}/x^2-2=0"$
3) $P: x\in[1;2[$
4) $P:" \forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$
5) $P:(\forall x\in\mathbb{R});-1\le\cos x\le 1$
6) $P:(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n\prec m$
7) $P:(\exists n\in\mathbb{N})$ $2n+1$ est pair
8) $P:(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$
9) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y-x>0$
10) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});2x+4=0$
11) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});x^2=2$
12) $P:(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$
13) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y^2=x$

Solution :

1) $\overline{P}:"\exists x\in\mathbb{R}/x^2\le 0"$ et on a P: est fausse
2) $\overline{P}$ $"\forall x\in\mathbb{R}/x^2-2\ne 0"$ et on a P: est vraie
3) $\overline{P}$: $x\notin[1;2[$
4) $\overline{P}$ $\exists n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\notin\mathbb{N}"$ et on a P: est fausse
5) $\overline{P}$ $(\exists x\in\mathbb{R});\cos x\succ 1$ ou $\cos x\prec -1$ et on a P: est vraie
6) $\overline{P}$ $(\exists n\in\mathbb{N});(\forall m\in\mathbb{N}):n\ge m$ et on a P: est vraie
7) $\overline{P}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ $2n+1$ est impair P: est fausse
8) $\overline{P}$ $(\exists n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\notin\mathbb{N}$ et on a P: est vraie

$\overline{P}$ 9) $(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):y-x\le 0$ et on a P: est fausse

10) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});2x+4=0$ on a P: est vraie
11) $P:$ $(\exists! x\in\mathbb{R});x^2=2$ on a P: est fausse
12) $\overline{P}$ $(\forall x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\notin\mathbb{Z}$ et on a P: est vraie
13) $\overline{P}$ $(\exists x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R}):y^2=x$ et on a P: est fausse

Exercice 2 Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.

6; Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Solution :

1. $"\forall x\in\mathbb{R}/x^2\ge 0"$
2. $"\exists x\in\mathbb{R}, x\succ x^2"$
3. $(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n\prec m$
4. $(\exists x\in\mathbb{R}):(\forall n\in\mathbb{Z});(\forall m\in\mathbb{N}^*):x\ne\frac{n}{m}$
5. $(\exists n\in\mathbb{N});(\forall m\in\mathbb{N})(\exists k\in\mathbb{N}):n=m\times k$
6. $(\forall x\in\mathbb{R});(\forall y\in\mathbb{R})/x\prec y\Rightarrow\exists z\in\mathbb{Q}/x\prec z\prec y$

Exercice 3 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $\begin{cases}0\le x\prec 2\\0\le y\prec 2\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\succ 1$

Solution : $\begin{cases}0\le x\prec 2\\0\le y\prec 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}\succ\frac{1}{2}\\\frac{1}{y}\succ\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\succ\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\succ 1$

Exercice 4 : $x\in\mathbb{R}^+$ Montrer que :

$\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow x=0$

Solution : $\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)=1$

$\Rightarrow 1+\left(\sqrt{x}\right)^2=1\Rightarrow 1+x=1\Rightarrow x=0$

Exercice 5 : 1) Montrer que :

$\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):a^2+b^2=0\Rightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}^+$ et $y\in\mathbb{R}^+$ Montrer que:

$x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

Solution : 1) $a^2+b^2=0\Rightarrow a^2=-b^2\Rightarrow a^2\in\mathbb{R}^-$

Or on sait que $a^2\in\mathbb{R}^+$ donc $a^2\in\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-$ donc $a^2=0$ donc $a=0$

Et puisque $a^2+b^2=0$ alors $b=0$

2)

$x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y}+1=0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{x}-1=0$ et $\sqrt{y}-1=0$ d'apres1)

$\Rightarrow\sqrt{x}=1$ et $\sqrt{y}=1\Rightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

Exercice 6 : Montrer que :

$\left(\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2\right): a^2+b^2=1 \Rightarrow |a+b|\le\sqrt{2}$

Solution : 1)supposons que : $a^2+b^2=1$

Or on sait que $\forall (a;b)\in\mathbb{R} : (a-b)^2\ge 0$

Donc : $a^2-2ab+b^2\ge 0$ et puisque : $a^2+b^2=1$ alors : $1-2ab\ge 0$ Donc $2ab\le 1$ et $a^2+b^2=1$

Par suite : $a^2+b^2+2ab\le 2$ donc $(a+b)^2\le 2$

donc $\sqrt{(a+b)^2}\le\sqrt{2}$ donc $|a+b|\le\sqrt{2}$

Or on sait que $a^2\in\mathbb{R}^+$ donc $a^2\in\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-$ donc $a^2=0$ donc $a=0$

Et puisque $a^2+b^2=0$ alors $b=0$

2)

$x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y}+1=0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0\Rightarrow\sqrt{x}-1=0$ et $\sqrt{y}-1=0$

d'apres1)$\Rightarrow\sqrt{x}=1$ et $\sqrt{y}=1\Rightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : $x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

Exercice 7 : Montrer que si $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$ alors $a+b\in\mathbb{Q}$

Solution : Prenons $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.

Alors $a=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$; De même $b=\frac{p'}{q'}$ avec $p'\in\mathbb{Z}$ et $q'\in\mathbb{N}^*$ donc

$a+b=\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{p\times q'+q\times p'}{q\times q'}$. Or le numérateur $p\times q'+q\times p'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur $q\times q'$ est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b=\frac{p''}{q''}$ avec $p''\in\mathbb{Z}$ et $q''\in\mathbb{N}^*$ Ainsi $a+b\in\mathbb{Q}$

Exercice 8 : on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par :

$f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ Montrer que :

$|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\le|f(x)-f(1)|\le\frac{1}{2}|x-1|$

Solution : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\prec x-1\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}$

On a : $f(x)-f(1)=\frac{x+2}{2x+1}-1=\frac{x+2-2x-1}{2x+1}=\frac{1-x}{2x+1}$

Donc : $|f(x)-f(1)|=\left|\frac{1-x}{2x+1}\right|=|1-x|\times\frac{1}{|2x+1|}$

Et on a : $|x-1|\prec\Rightarrow\frac{1}{2}\prec x\prec\frac{3}{2}\Rightarrow 2\prec 2x+1\prec 4$

$\Rightarrow\frac{1}{4}\prec\frac{1}{|2x+1|}\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\le|f(x)-f(1)|\le\frac{1}{2}|x-1|$

Donc : $|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\le|f(x)-f(1)|\le\frac{1}{2}|x-1|$

Exercice 9 : Montrer que : $n\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

Solution :

On a : $n\in\mathbb{N}$ donc $n+1\prec n+2$

donc $0\prec\frac{n+1}{n+2}\prec 1$ donc $\frac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

Exercice 10 : Montrer que pour tout $\forall x\in[-2;2]: 2\sqrt{2}\succ\sqrt{4-x^2}$.

Solution : l'inéquation est définie ssi voici le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_I=[-2;2]$

Soit $x\in[-2;2]$.

$2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2}=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}=\frac{8-4+x^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}$

$2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2}=\frac{4+x^2}{2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}\succ 0$

donc $\forall x\in[-2;2]: 2\sqrt{2}\succ\sqrt{4-x^2}$

Exercice 11: Montrer que pour tout $\forall x\in\mathbb{R}: |x-1|\le x^2-x+1$.

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : x >1 Alors|x−1|= x−1.

Calculons alors $(x^2-x+1)-(x-1)=x^2-x+1-x+1$

$(x^2-x+1)-(x-1)=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1\ge 0$ Ainsi $x^2-x+1\ge|x-1|$

Deuxième cas : x < 1. Alors|x−1|=−(x−1).

Nous obtenons

$(x^2-x+1)+(x-1)=x^2-x+1+x-1=x^2\ge 0$.

Et donc $x^2-x+1\ge|x-1|$

Conclusion : Dans tous les cas $x^2-x+1\ge|x-1|$.

Exercice 12 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E):

$1-\frac{x}{4}\succ\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (E)

et $x\in]-1;+\infty[$ **on a :** $x\in S\Leftrightarrow\frac{4-x}{4}\succ\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

1 cas : si $x\in[4;+\infty[$ alors $4-x\leq 0$ donc $S=\varnothing$

2 cas : si $x\in]-1;4[$ alors $4-x\geq 0$ donc

$\frac{4-x}{4}\succ\frac{1}{\sqrt{1+x}}\Leftrightarrow\left(\frac{4-x}{4}\right)^2\succ\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2\Leftrightarrow x\left(x^2-7x+8\right)\succ 0$

$\Leftrightarrow x\in\left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$ donc $S_2=\left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Donc $S=S_1\cup S_2=\left]0;\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]$

Exercice 13 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1):

$|x-1|+2x-3\geq 0$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (1)

soit $x\in\mathbb{R}$**:** on va déterminer le signe de : $x-1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

si $x\in[1;+\infty[$ alors $|x-1|=x-1$

donc l'inéquation (1) devient :

$x-1+2x-3\geq 0\Leftrightarrow 3x-4\geq 0$

$3x-4\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{4}{3}$ donc :

$S_1=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[\cap[1;+\infty[=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

si $x\in]-\infty;1]$ alors $|x-1|=-(x-1)=-x+1$

donc l'inéquation (1) devient :

$-x+1+2x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$

donc $S_2=[2;+\infty[\cap]-\infty;1]=\varnothing$

finalement : $S=S_1\cup S_2=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Exercice 14 : Montrer que pour tout

$\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$.

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

<u>Premier cas :</u> $x\geq 0$ Alors $x^2\geq 0$ donc $x^2+1\geq 1\succ 0$

donc $\sqrt{x^2+1}\succ 0$ et on a $x\geq 0$ donc $\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$

<u>Deuxième cas :</u> $x\leq 0$. on a $x^2+1\succ x^2$

donc $\sqrt{x^2+1}\succ\sqrt{x^2}$ donc $\sqrt{x^2+1}\succ|x|$ or $x\leq 0$

alors on a : $\sqrt{x^2+1}\succ -x$ donc $\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$

finalement : $\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$

Exercice 15 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1):

$x^2-|x-2|+5=0$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (1)

soit $x\in\mathbb{R}$**:** étudions le signe de : $x-2$

<u>Premier cas :</u> si $x\in[2;+\infty[$ alors $|x-2|=x-2$

donc l'équation (1) devient :

$x^2-(x-2)+5=0\Leftrightarrow x^2-x+7=0$

$\Delta=1-28=-27\prec 0$ donc : $S_1=\varnothing$

<u>Deuxième cas :</u> si $x\in]-\infty;2[$ alors

$|x-2|=-(x-2)=-x+2$

donc l'équation (1) devient :

$x^2+(x-2)+5=0\Leftrightarrow x^2+x+3=0$

$\Delta=1-12=-11\prec 0$ donc $S_2=\varnothing$

finalement : $S=S_1\cup S_2=\varnothing$

Exercice 16 : Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Solution : soit $n\in\mathbb{N}$ on a 3 cas possibles seulement pour n

$n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

<u>1cas :</u> $n=3k$

$n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2)=3k'$ Avec

$k'=k(3k+1)(3k+2)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>2cas :</u> $n=3k+1$

$n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$

$n(n+1)(n+2)=3(3k+1)(3k+2)(k+1)=3k'$

Avec $k'=(3k+1)(3k+2)(k+1)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>3cas :</u> $n=3k+2$

$n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+3)(3k+4)=3(3k+2)(k+1)(3k+4)=3k'$

Avec $k'=(3k+2)(k+1)(3k+4)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Exercice 17 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\neq 2$ et $y\neq 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-2\neq 2$

Solution : soit $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $2x+2y-xy-2=2 \Rightarrow x=2$ ou $y=2$

On a : $2x+2y-xy-2=2 \Rightarrow 2x+2y-xy-4=0$

$\Rightarrow x(2-y)-2(2-y)=0 \Rightarrow (2-y)(x-2)=0$

$\Rightarrow 2-y=0$ ou $x-2=0 \Rightarrow y=2$ ou $x=2$

Donc : $x\neq 2$ et $y\neq 2 \Rightarrow 2x+2y-xy-2\neq 2$

Exercice 18 : $x\in\mathbb{R}$ et $x\neq -5$

Montrer que : $x\neq -8 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x+5}\neq 2$

Solution : soit $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : : $\dfrac{x+2}{x+5}=2 \Rightarrow x=-8$

On a : $\dfrac{x+2}{x+5}=2 \Rightarrow x+2=2(x+5)$

$\Rightarrow x+2=2x+10 \Rightarrow x=-8$

Donc : $x\neq -8 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x+5}\neq 2$

Exercice 19 : Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Solution : Nous supposons que n n'est pas pair

Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair

Comme n n'est pas pair il est impair et donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$.

Alors $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$ avec $k'=2k^2+2k\in\mathbb{N}$.

Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 20 : $x\in\mathbb{R}; y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\neq y \Rightarrow (x+1)(y-1)\neq (x-1)(y+1)$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow x=y$??

On a : $(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1)\Rightarrow$

$xy-x+y-1=xy+x-y-1$

$\Rightarrow -2x=-2y \Rightarrow x=y$

Donc : $x\neq y \Rightarrow (x+1)(y-1)\neq (x-1)(y+1)$

Exercice 21 : Soit $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$

Montrer que $n\times p$ est pair ou n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Solution :

- Si n ou p sont pairs alors $n\times p$ est pair
- Si n ou p sont impairs alors

$n=2k+1$ et $p=2k'+1$ avec $k\in\mathbb{N}; k'\in\mathbb{N}$

Donc $n^2-p^2=(2k+1)^2-(2k'+1)^2$

$n^2-p^2==4\big(k(k+1)-k'(k'+1)\big)$ et on a : $m(m+1)$ est pair

$n^2-p^2=4(2\alpha-2\beta)=8(\alpha-\beta)=8k''$ donc n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Exercice 22 : Soient $a\succ 0$ et $b\succ 0$ Montrer que si $\dfrac{a}{1+b}=\dfrac{b}{1+a}$ alors a = b.

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\dfrac{a}{1+b}=\dfrac{b}{1+a}$ et $a\neq b$.

Comme $\dfrac{a}{1+b}=\dfrac{b}{1+a}$ alors $a(1+a)=b(1+b)$ donc $a+a^2=b+b^2$ d'où $a^2-b^2=b-a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b)=-(a-b)$ Comme $a\neq b$ alors $a-b\neq 0$ et donc en divisant par a−b on obtient :

a+ b =−1. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\dfrac{a}{1+b}=\dfrac{b}{1+a}$ alors a = b.

Exercice 23 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

$f(x)\leq M \Rightarrow x^2+2x\leq M \Rightarrow x^2+2x+1\leq M+1$

$\Rightarrow (x+1)^2\leq M+1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2}\leq\sqrt{M+1} \Rightarrow$

$|x+1|\leq\sqrt{M+1}$

$\Rightarrow -\sqrt{M+1}\leq x+1\leq\sqrt{M+1}\Rightarrow$

$-\sqrt{M+1}-1\leq x\leq\sqrt{M+1}-1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Nous obtenons une contradiction car il suffit de prendre : $x=\sqrt{M+1}$

Donc notre supposition est fausse donc : il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\leq M$

Exercice 24 : Montrer que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

Donc il existe $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$; tel que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec

$a\wedge b=1$

$\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow a=b\sqrt{2}\Rightarrow a^2=\left(b\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow a^2$ est pair $\Rightarrow a$ est pair

Et on a : $\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow 4k^2=2b^2\Rightarrow$

$2k^2=b^2$

$\Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair

Donc on a : $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec a est pair et b est pair

Cad : $a\wedge b\neq 1$ Nous obtenons une contradiction

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exercice 25 : (Contraposée ou absurde)

Soient $a;b\in\mathbb{Q}$

1)Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=b=0$

2)en déduire que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}\Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Solution :1) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $b\neq 0$

$a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow b\sqrt{2}=-a\Rightarrow -\frac{a}{b}=\sqrt{2}$

Or $a;b\in\mathbb{Q}$ donc $-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ mais on sait que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Nous obtenons donc une contradiction

Donc $b=0$ et puisque : $a+b\sqrt{2}=0$ alors $a=0$

2) supposons que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$ donc

$a-a'+b\sqrt{2}-b'\sqrt{2}=0$

donc $a-a'+\sqrt{2}\left(b-b'\right)=0$ et d'après **1) on aura :**

$a-a'=0$ et $b-b'=0$

donc $a=a'$ et $b=b'$

Exercice 26 : (absurde)

On considère l'ensemble : $A=\{1;2;3;4;...;n\}$ avec n un nombre entier impair

Et soient x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ;… ; x_n des éléments de l'ensemble A distincts deux a deux

Montrer que : $\exists i\in A/\ \ x_i-i$ est pair

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que :

$\forall i\in A/\ \ x_i-i$ est impair

On a donc :

$S=\left(x_1-1\right)+\left(x_2-2\right)+\left(x_3-3\right)+...+\left(x_n-n\right)$ un nombre entier impair

Car c'est la somme d'un nombre impair de nombres impairs

Or :

$S=\left(x_1+x_2+x_3+...+x_n\right)-\left(1+2+3+...+n\right)=0$

est 0 est pair

Nous obtenons donc une contradiction donc :

$\exists i\in A/\ \ x_i-i$ est pair

Exercice 27 : Montrer que La proposition

$P:\left(\forall x\in[0;1]\right):x^2\geq x$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:\left(\ni x\in[0;1]\right):x^2\prec x$

On posant : $x=\frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec\frac{1}{2}$ donc La proposition

$\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice 28 : Montrer que La proposition

$P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y\in\mathbb{R}\right):x^2+y^2\geq x+y$ est fausse :

Solution : sa négation est :

$\overline{P}:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right)\left(\exists y\in\mathbb{R}\right):x^2+y^2\prec x+y$

On posant : $x=1$ et $y=\frac{1}{2}$ on aura : $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec 1+\frac{1}{2}$

c a d $\frac{5}{4}\prec\frac{6}{4}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie

donc P est fausse

Exercice 29 : Montrer que La proposition

$P:\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ est fausse :

Solution : sa négation est :

$\overline{P}:\left(\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$

On posant : $a=4$ et $b=3$ on aura :

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $a+b=4+3=7$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice 30 : Montrer que La proposition suivante est fausse :

« Tout entier positif est somme de trois carrés »

(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple $6=1^2+1^2+2^2$.)

Démonstration. Un contre exemples : les carrés inférieurs à7 sont 0,1,4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

Exercice 31 : Montrer que La proposition

$P:\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right):x+\frac{1}{x}\geq 2$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:\left(\exists x\in\mathbb{R}^*\right): x+\frac{1}{x}\prec 2$

On posant : $x=-1$ on aura : $-1+\frac{1}{-1}=-2\prec 2$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice 32 : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f\left(x\right)=2x^2-x+3$ Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Solution : f est n'est pas pair ssi $\left(\exists x\in\mathbb{R}\right): f\left(-x\right)\neq f\left(x\right)$

f est n'est pas impair ssi $\left(\exists x\in\mathbb{R}\right): f\left(-x\right)\neq -f\left(x\right)$

On a en effet : $f\left(1\right)=4$ et $f\left(-1\right)=6$ donc

$f\left(-1\right)\neq -f\left(1\right)$ et $f\left(-1\right)\neq f\left(1\right)$

Donc f n'est ni pair ni impair

Exercice 33 : Montrer que La proposition

$P:\forall\left(a;b;c;d\right)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\ c\neq d\end{cases}\Rightarrow a+c\neq b+d$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:\exists\left(a;b;c;d\right)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\neq b\\ c\neq d\end{cases}$ et

$a+c=b+d$

On a : $2\neq 3$ et $1\neq 0$ et $2+1=3+0$

donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice 34 : Montrer que La proposition

$P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\exists y\in\mathbb{R}\right): x^2-xy+y^2=0$ est fausse

Solution : sa négation est :

$\overline{P}:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y\in\mathbb{R}\right): x^2-xy+y^2\neq 0$

On posant : $x=1$ on aura : $1-y+y^2$ c a d y^2-y+1

$\Delta=\left(-1\right)^2-4=-3\prec 0$ donc : $y^2-y+1\succ 0$ donc :

$y^2-y+1\neq 0$

donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exercice 35 : $\forall x>0\quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Solution : $x+\frac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{\left(x-1\right)^2}{x}\geq 0$

et puisque on a : $\frac{\left(x-1\right)^2}{x}\geq 0$ donc $\forall x>0\quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Exercice 36 : soit $x\in\mathbb{R}$ Montrer que :

$\left|x-1\right|\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{2}{3}$

Solution :

$\left|x-1\right|\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq x-1\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}+2\leq x-1+2\leq\frac{1}{2}+2$

$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\leq x+1\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{2}{3}$

Exercice 37 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(E\right)$:

$\sqrt{x^2+1}=2x$

soit S l'ensemble des solution de l'équation $\left(E\right)$

Solution :

Methode1 : $x\in S\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=2x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}^2=\left(2x\right)^2$

$\Rightarrow x^2+1=4x^2\Rightarrow 3x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}oux=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Remarque : on ne peut pas affirmer que :

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ sont les solutions de l'équation

Et inversement on a : $\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\neq-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Donc : $-\frac{\sqrt{3}}{3}\notin S$ et on a : $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Methode2 : $x\in S\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=2x$ et $x\geq 0\Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+1}^2=\left(2x\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2+1=4x^2$ et $x\geq 0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}$ et $x\geq 0$

$\Leftrightarrow$ ($x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$) et $x\geq 0$

Donc : $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Exercice 38 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $\left|x-y\right|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Solution : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$\left|x-y\right|\leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}\Leftrightarrow\left|x-y\right|^2\leq\left(2\sqrt{x^2+y^2+xy}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\leq 4x^2+4y^2+4xy$

$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+6xy\geq 0$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2+2xy+y^2\right)\geq 0\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2\geq 0$

On sait que $\left(x+y\right)^2\geq 0$ (vraie)

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R}$: $|x-y|\le 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Exercice 39 : 1) Montrer que :

$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ Montrer que:

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

Solution : 1)a) $\Rightarrow:\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0 \Rightarrow a=0$ et $b=0$

Supposons que ; $a+b=0$ et ($a\neq 0$ ou $b\neq 0$) et $(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2$

Donc $a+b\succ 0$ contradiction par suite $a=0$ et $b=0$

b) $\Leftarrow$ inversement si $a=0$ et $b=0$ alors on aura $a+b=0$

donc : $\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right): a+b=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}-2=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=0$ or $\sqrt{x^2+1}-1\ge 0$ et $\sqrt{y^2+1}-1\ge 0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-1=0$ et $\sqrt{y^2+1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=1$ et $\sqrt{y^2+1}=1$

$\Leftrightarrow x^2+1=1$ et $y^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0$ et $y^2=0 \Leftrightarrow x=0$ et $y=0$

Donc : $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2 \Leftrightarrow x=y=0$

Exercice 40 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}; 3^n\ge 1+2n$.

Solution : notons P(n) La proposition suivante : $\forall n\in\mathbb{N}; 3^n\ge 1+2n$. Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $3^0\ge 1+2\times 0$ donc $1\ge 1$.

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $3^n\ge 1+2n$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $3^{n+1}\ge 1+2(n+1)$?? c'est-à-dire

Montrons que $3^{n+1}\ge 2n+3$??

On a : $3^n\ge 1+2n$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $3^n\times 3\ge 3\times(1+2n)$

donc : $3^{n+1}\ge 6n+3$

Or on remarque que : $6n+3\ge 2n+3$ (on pourra faire la différence $(6n+3)-(2n+3)=4n\ge 0$)

donc : on a $6n+3\ge 2n+3$ et $3^{n+1}\ge 6n+3$ donc $3^{n+1}\ge 2n+3$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n > 0, c'est-à-dire $\forall n\in\mathbb{N}; 3^n\ge 1+2n$.

Exercice 41 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$.

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons

$1=\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$ donc $1=1$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$??

On a : $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence:

$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$

donc

$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*; 1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

Exercice 42 : Montrer par récurrence que :pour tout entier $n\ge 5$: $2^n\ge 6n$

Solution : notons P(n) La proposition : « $2^n\ge 6n$ »

1étapes : Initialisation : Pour $n=5: 2^5=32$ et $6\times 5=30$ donc $2^5\ge 6\times 5$

Donc P(5) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $2^n\ge 6n$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $2^{n+1} \geq 6(n+1)$??

Or, puisque $2^n \geq 6n$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

Donc : $2^n \times 2 \geq 6n \times 2$ donc $2^{n+1} \geq 12n$ **(1)**

Or on remarque que : $12n \geq 6(n+1)$ **(2)**

En effet : $12n - 6(n+1) = 6n - 6 \geq 0$

Car : $n \geq 5$ donc $6n \geq 30$ donc $6n - 6 \geq 24 \geq 0$

On conclut par récurrence que : Pour tout $n \geq 5$:

$2^n \geq 6n$

Exercice 43 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; n^3 + 2n$ est divisible par 3

Solution :montrons $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 + 2n = 3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons

$0^3 + 2 \times 0 = 0$ est un multiple de3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 + 2n = 3k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3 + 2(n+1) = 3k'$??

$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 =$

$= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 = 3k + 3(n^2 + n + 1) = 3(k + n^2 + n + 1)$

$= 3(k + n^2 + n + 1) = 3k'$ avec $k' = k + n^2 + n + 1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; n^3 + 2n$ est divisible par 3

Exercice 44 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}.$$

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons

$1^2 = \frac{1 \times (1+1) \times (2+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$

donc $1 = 1$. Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \times (n+2) \times (2n+3)}{6}$??

On a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + (n+1)^2$

et on a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) = (n+1)\left(\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6}\right)$

$= (n+1)\left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6}\right)$

Et on remarque que : $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$

Donc : $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \times (n+2) \times (2n+3)}{6}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$

Exercice 45 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}.$$

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons

$1^3 = \frac{1^2 \times (1+1)^2}{4} = 1$

donc $1 = 1$. Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2 \times (n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$

et on a : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}\right)$

$$=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{2^2}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 46 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1+3=4$ et $(1+1)^2=4$ donc $4=4$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=(n+1)^2$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$$\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$$

??

On a : $\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)+(2n+3)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence:

$$\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=(n+1)^2$$

donc

$$\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=(n+1)^2+(2n+3)=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4$$

donc $\sum_{k=1}^{k=n+1}(2k+1)=(n+2)^2$ donc P(n+1) est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence on a :

$$\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=(n+1)^2\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$$

Exercice 47 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};4^n+6n-1$ est divisible par 9

Solution :montrons que : $\exists k\in\mathbb{N}/4^n+6n-1=9k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons

$4^0+6\times0-1=0$ est un multiple de 9

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/4^n+6n-1=9k$ donc

$4^n=9k-6n+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$\exists k'\in\mathbb{N}/4^{n+1}+6(n+1)-1=9k'$??

$$4^{n+1}+6(n+1)-1=4\times4^n+6n+6-1$$

$$=4\times(9k-6n+1)+6n+6-1=36k+4-24n+6n+6-1$$

$$=36k+9-18n=9(4k+1-2n)=9k'$$

avec $k'=4k+1-2n$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N};4^n+6n-1$ est divisible par 9

Exercice 48 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6

Solution : 1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $7^0-1=0$ est un multiple de 6

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/7^n-1=6k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k'\in\mathbb{N}/7^{n+1}-1=6k'$??

$$7^{n+1}-1=7\times7^n-1=7^n\times(6+1)-1=6\times7^n+7^n-1=6\times7^n+6k$$

$7^{n+1}-1=6(7^n+k)=6k'$ avec $k'=7^n+k$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6

Erreur classique dans les récurrences

Exercice 49 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :

P (n) : 10^n-1 est divisible par 9

Q (n) : 10n + 1 est divisible par 9

1) Démontrer que si P (n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.

2) Démontrer que si Q (n) est vraie alors Q (n + 1) est vraie.

3) Un élève affirme : " Donc P (n) et Q (n) sont vraies pour tout entier naturel n.

Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.

4) Démontrer que P (n) est vraie pour tout entier naturel n.

5) Démontrer que Q (n) est fausse pour tout entier naturel n.

On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exercice 50 : Soit P(n) la propriété dénie sur $\mathbb{N}$ par : 7^n-1Est divisible par 3

1) Démontrer que si P(n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.

2) Que peut-on conclure

Exercice 51 : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tel que : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[$

Montrer que : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec1$

Solution : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec1\Leftrightarrow\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|\prec1\Leftrightarrow|a+b|\prec|1+ab|$

$\Leftrightarrow|a+b|^2\prec|1+ab|^2\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\prec1+a^2b^2+2ab$

Donc : $-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec1\Leftrightarrow\left(a^2-1\right)\left(1-b^2\right)\prec0$

Donc : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[\Rightarrow-1\prec a\prec1$ et $-1\prec b\prec1$

$\Rightarrow|a|\prec1$ et $|b|\prec1\Rightarrow a^2\prec1$ et $b^2\prec1\Rightarrow a^2-1\prec0$ et $1-b^2\succ0$

$\Rightarrow\left(a^2-1\right)\left(1-b^2\right)\prec0$

Donc : $a\in\left]-1;1\right[$ et $b\in\left]-1;1\right[\Rightarrow-1\prec\dfrac{a+b}{1+ab}\prec1$

Exercice 52 : Traduisez les propositions suivantes en langage courant puis déterminer sa négation et la valeur de vérité :

1) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\left(\exists y\in\mathbb{R}\right):x>y$

2) $P:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);\left(\forall y\in\mathbb{R}\right):x>y$

3) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);x^2\geq4\Rightarrow x\geq2$

4) $P:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);x^2=4$

5) $P:\left(\forall\varepsilon\succ0\right);\left(\exists x\in\left\{1+\dfrac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\prec\varepsilon+10$

Solution :

1)Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x est supérieur strictement a y et $\overline{P}:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);\left(\forall y\in\mathbb{R}\right):x\leq y$

$P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\left(\exists y\in\mathbb{R}\right):x>y$ Est une proposition vraie car l'lorsque je prends x je peux trouver y il suffit de prendre : $y=x-1$

2) il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ on a x est supérieur strictement a y et $\overline{P}:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\left(\exists y\in\mathbb{R}\right):x\leq y$

P est une proposition fausse car l'lorsque je prends x je peux toujours donner à y la valeur: $y=x+1$

3) $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);x^2\geq4\Rightarrow x\geq2$

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ si x^2 est supérieur ou égal à 4 alors x est supérieur ou égal à 2

$\overline{P}:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);x^2\geq4$ et $x\prec2$

P est une proposition fausse car l'lorsque je prends $x=-2$ on a $(-2)^2\geq4$ et $-2\prec2$

4) $P:\left(\exists x\in\mathbb{R}\right);x^2=4$

il existe au moins un y appartenant à $\mathbb{R}$ tel que x^2 est égal à 4

$\overline{P}:\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);x^2\neq4$

P une proposition vraie car il suffit de prendre : $x=2$

5) $P:\left(\forall\varepsilon\succ0\right);\left(\exists x\in\left\{1+\dfrac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\prec\varepsilon+10$

Pour tout ε supérieur strictement a 0 il existe au moins un x qui s'écrit sous la forme $1+\dfrac{1}{n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ tel que x est inferieur strictement a $\varepsilon+10$

$\overline{P}:\left(\exists\varepsilon\succ0\right);\left(\forall x\in\left\{1+\dfrac{1}{n};n\in\mathbb{N}^*\right\}\right)/\,x\geq\varepsilon+10$

Soit $\varepsilon\succ0$

$x\prec\varepsilon+10\Leftrightarrow1+\dfrac{1}{n}\prec\varepsilon+10\Leftrightarrow\dfrac{1}{n}\prec\varepsilon+9\Leftrightarrow n\succ\dfrac{1}{\varepsilon+9}$

Donc pour $n=E\left(\dfrac{1}{\varepsilon+9}\right)+1$ on prend $x=1+\dfrac{1}{n}$ et on a $x\prec\varepsilon+10$

P Est donc une proposition vraie

Exercice 53 : A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formules $P\,ou\,\overline{P}$ est une tautologies.

Solution :

P	$\overline{P}$	$P\,ou\,\overline{P}$
0	1	1
1	0	1

Exercice 54 : 1. (Raisonnement direct) Soient $a\in\mathbb{R}^+;b\in\mathbb{R}^+$

Montrer que si $a\leq b$ alors $a\leq\dfrac{a+b}{2}\leq b$ et $0\leq\sqrt{ab}\leq b$

2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $\forall n\in\mathbb{N};n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

4. (Absurde) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $x<2\Rightarrow x^2<4$?

6. (Récurrence) Fixons un réel $a\in\mathbb{R}^{+*}$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};(1+a)^n\geq1+n\times a$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien