Cours et* exercices d'applications et de réflexions *sur les nombres complexes (Partie 1)

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

NOMBRES COMPLEXES

I) L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

1) Définition d'un nombre complexe.

1.1 L'ensemble $\mathbb{C}$; définition et vocabulaire: On admet qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ ses éléments s'appelles des nombres complexes qui vérifie :

1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
2) On définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux opérations appelées la somme et la multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.
3) L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un nombre non réel noté i et qui vérifie $i^2 = -1$
4) Tout nombre complexe z s'écrit et de façon unique comme : $\boldsymbol{z = a + ib}$ où a et b sont des réels
5) Le réel a s'appelle la partie réel du nombre complexe z ; on écrit : $\boldsymbol{a = Re(z)}$
6) Le réel a s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe z ; on écrit : $\boldsymbol{b = Im(z)}$
7) L'écriture : $\boldsymbol{z = a + ib}$ s'appelle l'écriture algébrique du nombre complexe $\boldsymbol{z}$.

Exemples

• Les nombres −1 ; 0 ; 3/4 ; $\sqrt{2}$ sont des nombres réels donc ce sont aussi des éléments de $\mathbb{C}$.

• À l'aide du nombre i et de la multiplication : −i ; 2i ; $i\sqrt{2}$ ... sont aussi dans $\mathbb{C}$.

• Avec les additions, les nombres suivants sont aussi dans $\mathbb{C}$: $-1+i$; $\sqrt{2}+2i$

THÉORÈME : Soient $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $(x';y')\in\mathbb{R}^2$ deux nombres complexes :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

L' écriture algébrique d'un nombre complexe est unique.

PREUVE :

Soient $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ deux complexes tels que $z = z'$

$$z = z' \Leftrightarrow x+iy = x'+iy' \Leftrightarrow x-x' = i(y'-y)$$

Raisonnons par l'absurde : si $y'-y \neq 0$ alors

$i = \dfrac{x-x'}{y'-y}$ étant un réel, on aboutit à une contradiction. Donc : $y' = y$ et on déduit alors $x-x' = 0$ donc : $x = x'$

La réciproque est claire.

Remarque : $z = x+iy$ et $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

1) $x+iy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 2) $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$

1.3 Remarque :

1) L'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonné, c'est-à-dire : $(\forall(x, y) \in \mathbb{R}2)(x \leq y \text{ ou } y \leq x)$
2) L'ensemble des nombres complexe n'est pas ordonné.

1.4 Des sous-ensembles de $\mathbb{C}$

1) L'ensemble $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels est une partie de $\mathbb{C}$; $(\forall x \in \mathbb{R})(x = x + 0i)$
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$
2) L'ensemble $i\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$, s'appelle L'ensemble des imaginaires purs ; $\boldsymbol{i}\mathbb{R} = \{\boldsymbol{iy}/\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\}$
$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$
3) $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$
($\subsetneq$ veut dire strictement inclus strictement : $2 + 3i \notin \mathbb{R}$ et $2 + 3i \notin i\mathbb{R}$)

II) LES OPERATIONS DANS $\mathbb{C}$.

1) L'addition dans $\mathbb{C}$.

1.1 Définition

Définition : Soient $z = a + ib$ et $z'= a' + ib'$ deux nombres complexes.

La somme des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z + z'$ définie par :

$\boldsymbol{z + z'= (a + a') + i(b + b')}$

On en déduit que : $Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$ et

$Im(z+z') = Im(z) + Im(z')$

1.2 Propriétés

L'addition dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est :

1) Associative :$(\forall(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3)$ $((z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3))$

2) Commutative : $(\forall(z, z' \in \mathbb{C}^2)(z + z' = z' + z)$

3) 0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{C}$: $(\forall z \in \mathbb{C})(0 + z = z + 0 = z)$

4) Chaque élément z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'opposé de z noté $(-z)$; $z + (-z) = (-z) + z = 0$

On dit que $\mathbb{C}$ muni de l'addition est un groupe commutatif, on le note par : $(\mathbb{C}, +)$

1.3 La différence de deux nombres complexes.

Soient z et z' deux nombres complexes tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ La différence de z et z' est la somme de z avec le symétrique de z' c'est-à-dire : $z + (-z')$ qu'on la note : $z - z'$

$\boldsymbol{z - z' = (a - a') + i(b - b')}$

2) La multiplication dans $\mathbb{C}$.

2.1 Définition :

Comme la multiplication dans $\mathbb{C}$ prolonge celle dans $\mathbb{R}$ on peut définir la multiplication dans $\mathbb{C}$ par :Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

Le produit des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z \times z'$ définie par :

$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + ab'i + iba' + bb'i^2$

$i^2 = -1$

$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

$\boldsymbol{z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')}$

2.2 Propriétés :

La multiplication dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est :

1) Associative :$(\forall(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3)$ $((z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3))$

2) Commutative : $(\forall(z, z') \in \mathbb{C}^2)(z \times z' = z' \times z)$

3) 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$: $(\forall z \in \mathbb{C})(1 \times z = z \times 1 = z)$

4) Chaque élément non nul z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'inverse de z noté : ($\frac{1}{z}$ ou z^{-1})

Et on a $z \times \frac{1}{z} = 1$

On dit que $\mathbb{C}^*$ muni de la multiplication est un groupe commutatif, on le note par : $(\mathbb{C}^*, \times)$

En plus des 8 propriétés que vérifient l'addition et la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{C}$ il y a une propriété commune entre les deux opérations :

5) La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$:

$(\forall(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3)$ $(z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3)$

Définition : Puisque $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif et $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif et la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$; on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

2.3 Le quotient de deux complexes.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes où $z' \neq 0$ le quotient des nombres z et z' est le produit de z et de l'inverse de z' et se note $\frac{z}{z'}$ ou $z(z'^{-1})$

2.3 Règles de calculs dans $\mathbb{C}$

$(\mathbb{C}, +, \times)$ étant un corps commutatif ; toutes les règles de calculs qu'on a connu dans $\mathbb{R}$ sont vraies dans $\mathbb{C}$.

1) $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$

2) $z^0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\ z^n = \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}\ )\ n\ fois$

3) $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$

4) $z^{n+m} = z^n \times z^m$

5) $z^{n-m} = z^n / z^m$

6) $\left(z^n\right)^m = z^{n\times m}$

7) $z^n - z_1^n = \left(z - z_1\right)\left(z^{n-1} + z^{n-2}z_1 + \ldots + z^1 z_1^{n-2} + z_1^{n-1}\right)$

8) Si $z \neq 1$ alors : $S = 1 + z^1 + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

somme des termes d'une suite géométrique

9) $\left(z + z_1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k z_1^{n-k}$ formule de binôme

Application : Trouver la forme algébrique et déterminer la parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2$ $\quad z_2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$

$z_3 = \frac{1-3i}{3-i}$ $\quad z_4 = \frac{1+i}{3-2i}$ $\quad z_5 = (1+i)^{10}$

Solution :1)

$z_1 = -6 + 5i = a + bi$ donc $\operatorname{Re}(z_1) = -6$ et $\operatorname{Im}(z_1) = 5$

2) $z_2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3 = 1^3 + 3\times 1^2 \times \left(\sqrt{3}i\right) + 3\times 1 \times \left(\sqrt{3}i\right)^2 + \left(\sqrt{3}i\right)^3$

$z_2 = 1 + 3\sqrt{3}i - 3\times 3 - 3\sqrt{3}i = -8 + 0i \in \mathbb{R}$

car $\operatorname{Im}(z_2) = 0$

3) $z_3=\dfrac{1-3i}{3-i}=\dfrac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{3+i-9i+3}{9-i^2}=\dfrac{6-8i}{10}$

$z_3=\dfrac{6}{10}-\dfrac{8i}{10}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4i}{5}$ donc $\mathrm{Re}(z_1)=\dfrac{3}{5}$ et $\mathrm{Im}(z_1)=-\dfrac{4}{5}$

4) $z_4=\dfrac{1+i}{3-2i}=\dfrac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{3+2i+3i-2}{9-4i^2}=\dfrac{1+5i}{13}=\dfrac{1}{13}+i\dfrac{5}{13}$

5) $z_5=(1+i)^{10}=\left((1+i)^2\right)^5=\left(1^2+2i\times1+i^2\right)^5=(2i)^5$

$z_5=(2i)^5=2^5\times i^5=32\times\left(i^2\right)^2\times i=32i$

est un imaginaire pur car $\mathrm{Re}(z_5)=0$

REMARQUES :

Lorsque Im(z) = 0, z = a est réel.

Lorsque Re(z) = 0, z = ib est appelé imaginaire pur.

III) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1)L'interprétation géométrique et représentation d'un nombre complexe

Le plans $(\mathcal{P})$ est muni du repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{u};\vec{v})$; et soit $\mathcal{V}_2$ le plan vectoriel associé à $(\mathcal{P})$.

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe le couple (a, b) est associé à un point unique M dans le plan $(\mathcal{P})$.

L'application : $\mathbb{C}\longrightarrow(\mathcal{P})$

$$z\mapsto M(a, b)$$

où $a=Re(z)$ et $b=Im(z)$ est une bijection

1) Le point M s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan $(\mathcal{P})$, et l'application

2) Le complexe z s'appelle l'affixe du point $\boldsymbol{M}$

on écrit : $z=aff(M)$ et on écrit : $z_M=a+ib$

3) L'application : $\mathbb{C}\longrightarrow\mathcal{V}_2$

$$z\mapsto\vec{u}\ (a\,;b)$$

où $a=Re(z)$ et $b=Im(z)$ est une bijection

4) Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan $(\mathcal{P})$

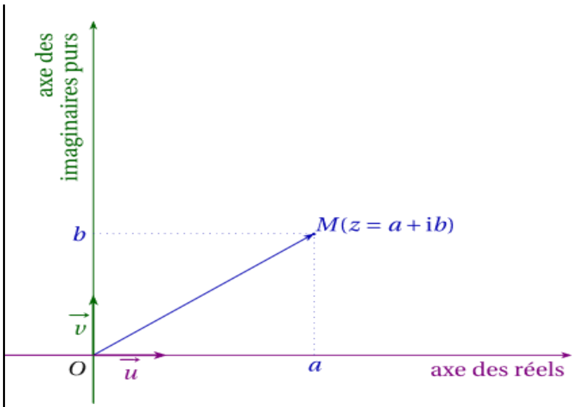
5) Le complexe z s'appelle l'affixe du vecteur $\vec{u}$ on écrit : $z=aff(\vec{u})$ on écrit : $z_{\vec{u}}=a+ib$

6) Le plan $(\mathcal{P})$ s'appelle un plan complexe

7) a)L'axe $(O;\vec{u})$ s'appelle l'axe des réels

b) L'axe $(O;\vec{v})$ s'appelle l'axe des imaginaires

Dans tout qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère $\mathcal{R}(O;\vec{u};\vec{v})$



REMARQUES :

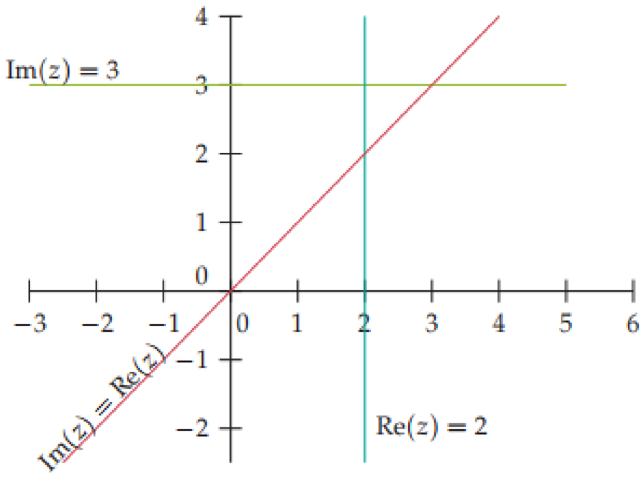
1)Les complexes z = a ∈ R sont des nombres réels et sont représentés sur sur l'axe des Réels.

2)Les complexes z = ib, b ∈ R sont des imaginaires purs et sont représentés l'axe des imaginaires purs.

3)Le plan est alors appelé plan complexe.

Exemple1 : Dans le plan complexe, on a représenté ci-contre les points d'affixe z tels que

- Re(z) = 2
- Im(z) = 3
- Re(z) = Im(z).



2) Les opérations sur les affixes.

Propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}_2$; M et N deux points dans le plan $(\mathcal{P})$ et α un réel ;

On a :

1) $aff(A)=aff(B)\Leftrightarrow A=B$

et $aff(\vec{u})=aff(\vec{v})\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{v}$

2) $aff(\vec{u}+\vec{v})=aff(\vec{u})+aff(\vec{v})$

3) $aff(\alpha\vec{u})=\alpha\times aff(\vec{u})$

4) $aff(\overrightarrow{AB})=aff(B)-aff(A)=z_B-z_A$

Propriété :

1) Soient $[AB]$ un segment de milieu I ; on a :

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$$

2) Si $G = Bar\{(A_k,\ \alpha_k)1\le k\le n\}$ et $z_k = aff(A_k)$

alors : $z_G=\frac{\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k z_k}{\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k}$

3) Cas particuliers 2 points pondérés :

$G = Bar\{(A,\ \alpha);\ (B,\ \beta)\}$ on a $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$

4)Cas particuliers 3 points pondérés :
$G = Bar\{(A,\ \alpha);\ (B,\ \beta);\ (C,\ \gamma)\}$ on a :

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

3) Condition complexe d'alignement de 3 points

Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs : z_A, z_B et z_C

On sait que :

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow (\exists\alpha\in\mathbb{R})(\ \overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}\ )$

$\Leftrightarrow (\exists\alpha\in\mathbb{R})(\ z_C-z_A=\alpha(z_B-z_A))$

$\Leftrightarrow (\exists\alpha\in\mathbb{R})\ (\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\alpha)\Leftrightarrow\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

Propriété : Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs z_A, z_B et z_C

les points A, B et C sont alignés si et seulement si :

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$$

Exemple1 : soient dans le plan complexe les points : $A(1+i)$ et $B\left(\frac{1}{2}+2i\right)$ et $C(-1-i)$

Montrer que les les points A, B et C sont alignés.

Solutions :

$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\frac{1}{2}+2i-i}{-1-i-i}=\frac{\frac{1}{2}+i}{-1-2i}=\frac{\frac{1}{2}+i}{-2\left(\frac{1}{2}+i\right)}=-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$

Donc : les les points A, B et C sont alignés

Exemple2 : soient dans le plan complexe les points : $A(2;-3)$ et $B(1;1)$ et $C(1;2)$

1)Determiner les affixes des points A et B et C ?

2)Determiner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

3) Déterminer l'affixe de I, milieu de $[AB]$.

4)Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) Déterminer le barycentre de $\{(A,\ 2);\ (B,-1),\ (C,\ 3)\}$

6) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solutions : 1) l'affixe du point A est $z_A=2-3i$

l'affixe du point B est $z_B=1+i$

l'affixe du point C est $z_c=1+2i$

2) $aff(\overrightarrow{AB})= aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$

$$z_{\overrightarrow{AB}}=(1+i)-(2-3i)=-1+4i$$

3) $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{2-3i+1+i}{2}=\frac{3-2i}{2}=\frac{3}{2}-i$

4) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{(1+2i)-(2-3i)}{(1+i)-(2-3i)}=\frac{-1+5i}{-1+4i}$

$$=\frac{(-1+5i)(-1-4i)}{(-1-4i)(-1+4i)}=\frac{1+4i-5i+20}{(-1)^2-(4i)^2}$$

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{21-i}{17}=\frac{21}{17}-\frac{1}{17}i\notin\mathbb{R}$$

Donc : les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) le barycentre de $\{(A,\ 2);\ (B,-1),\ (C,\ 3)\}$?

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2z_A-1z_B+3z_C}{2-1+3}$$

$$z_G=\frac{2(2-3i)-1(1+i)+3(1+2i)}{2-1+3}=\frac{6-i}{4}=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}i$$

6) ABCD est un parallélogramme si et seulement

Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ c'est-à-dire : $z_B-z_A=z_C-z_D$

$$z_D=z_C+z_A-z_B$$

On en déduit en remplaçant par les données :

$z_D = 1+2i+2-3i-1-i = 2-2i$

Exercice 1 :

soient dans le plan complexe les points :

A ; B ; C ; D ; E d'affixes respectivement :

$z_A = 1+i$ et $z_B = 3+2i$ et $z_C = 2-i$ et $z_D = -2i$ et

$z_E = 2$

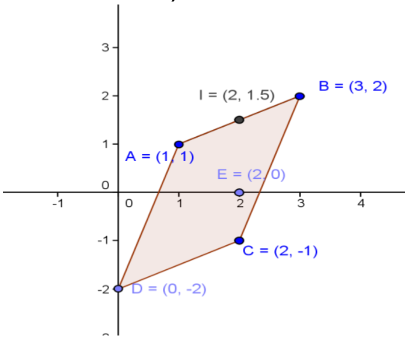
1)Représenter ces points dans le plan complexe

2) Déterminer l'affixe de I milieu de $[AB]$.

3)Determiner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

4)montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Solution : 1)



I milieu de $[AB]$. Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ donc $z_I - z_A = z_B - z_I$

Donc : $z_I = \dfrac{z_B + z_A}{2}$ donc : $z_I = \dfrac{3+2i+1+i}{2} = 2+\dfrac{3}{2}i$

Donc : $I\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$

3) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3+2i-(1+i) = 3+2i-1-i = 2+i$

4)il suffit de monter que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

On a : $z_{\overrightarrow{AB}} = 2+i$

$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 2-i-(-2i) = 2+i$

Donc : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ par suite : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

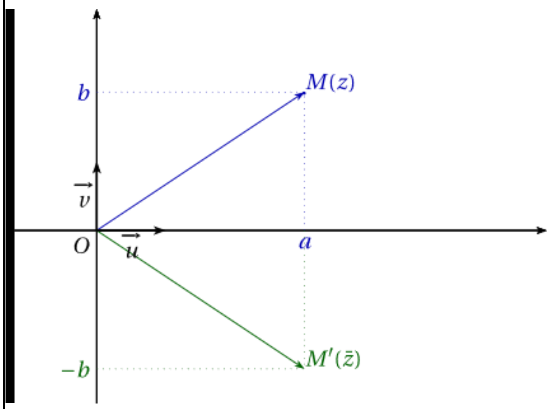
Donc : le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

IV) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

Définition : Soit le nombre complexe $z = a + ib$ (a et b sont des réels) ; le nombre complexe qu'on note $\bar{z}$ et qui est égale à $\bar{z} = a - ib$

S'appelle le conjugué du nombre complexe z

Si z est l'affixe de M, $\bar{z}$ est l'affixe de M' du symétrique de M par rapport à l'axe des réels.



Exemple : 1) $z = 2+3i$ son conjugué est $\bar{z} = 2-3i$

2) $z = 3i+6$ son conjugué est $\bar{z} = -3i+6$

3) $z = 3-\sqrt{6}$ son conjugué est $\bar{z} = 3-\sqrt{6}$

4) $\overline{-7} = -7; \overline{2i} = -2i; \overline{-5-3i} = -5+3i; \overline{3+2i} = 3-2i$

Propriété : (Règles de calculs) $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$

1)si $z = x+iy$ alors $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$

2) $\bar{\bar{z}} = z$ 3) $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ 4) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

5) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ 6) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

7) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ 8) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

9) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$ 10) $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\bar{z'}}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$

11) $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\bar{z}\right)^n$ $n \in \mathbb{Z}$

12) $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

PREUVE :

• On prouve la 8)

On écrit les complexes z et z' sous forme algébrique : $z = a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Et $z' = a'+b'i$ avec $a' \in \mathbb{R}$ et $b' \in \mathbb{R}$

On a alors : $\overline{z \times z'} = \overline{(a+bi)(a'+b'i)}$

$\overline{z \times z'} = \overline{aa'+ab'i+ba'i-bb'} = \overline{(aa'-bb')+(ab'+ba')i}$

$\overline{z \times z'} = \overline{aa'+ab'i+ba'i-bb'} = (aa'-bb')-(ab'+ba')i$

D'autre part :

$$\overline{z}\times\overline{z'}=\overline{a+bi}\times\overline{a'+b'i}=(a-bi)\times(a'-ib')$$

$$\overline{z}\times\overline{z'}=aa'-iab'-a'bi-bb'=(aa'-bb')-(ab'+ba')i$$

Ce qui donne bien l'égalité cherchée.

- On prouve la 9)

On a : $z\times\frac{1}{z}=1$ donc : $\overline{z\times\frac{1}{z}}=\overline{1}$ donc $\overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=1$

Donc : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ cqfd

- On prouve la 10)

On a : $\frac{z'}{z}=z'\times\frac{1}{z}$ donc $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\overline{\left(z'\times\frac{1}{z}\right)}$

donc $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\overline{z'}\times\overline{\frac{1}{z}}=\overline{z'}\times\frac{1}{\overline{z}}=\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

- L'égalité 11) se démontre par récurrence si $n\in\mathbb{N}$

En effet : n=0 on a $\overline{(z^0)}=\left(\overline{z}\right)^0$ car $\overline{1}=1$

Supposons que $\overline{(z^n)}=\left(\overline{z}\right)^n$

Montrons que : $\overline{(z^{n+1})}=\left(\overline{z}\right)^{n+1}$?

$$\overline{(z^{n+1})}=\overline{z^n\times z}=\overline{z^n}\times\overline{z}=\left(\overline{z}\right)^n\times\overline{z}=\left(\overline{z}\right)^{n+1}$$

Donc : $\overline{(z^n)}=\left(\overline{z}\right)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Si n est négatif alors $m=-n\in\mathbb{N}$

Donc :

$$\overline{(z^n)}=\overline{(z^{-m})}=\overline{\left(\frac{1}{z^m}\right)}=\frac{1}{\overline{z^m}}=\frac{1}{\left(\overline{z}\right)^m}=\left(\overline{z}\right)^{-m}=\left(\overline{z}\right)^n$$

Donc : $\overline{(z^n)}=\left(\overline{z}\right)^n$ $\forall n\in\mathbb{Z}$

Exemple1 : Démontrer que $S=(1+i)^5+(1-i)^5$ est un nombre réel.

Solution : On a :

$$\overline{S}=\overline{(1+i)^5+(1-i)^5}=\overline{(1+i)^5}+\overline{(1-i)^5}=\left(\overline{1+i}\right)^5+\left(\overline{1-i}\right)^5$$

$$\overline{S}=(1-i)^5+(1+i)^5=S$$

S est donc bien un nombre réel.

Exemple2 : on pose : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $S=j^{2n}-j^n\quad n\in\mathbb{Z}$

1)montrer que : $j^2=\overline{j}$

2)Démontrer que : $S\in i\mathbb{R}\quad\forall n\in\mathbb{Z}$

Solution :1)

$$j^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\frac{1}{2}i\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{j}$$

2)il suffit de montrer que : $S+\overline{S}=0$

$$S+\overline{S}=j^{2n}-j^n+\overline{j^{2n}-j^n}=\left(j^2\right)^n-j^n+\overline{\left(j^2\right)^n-j^n}$$

$$S+\overline{S}=\left(\overline{j}\right)^n-j^n+\overline{\left(j^2\right)^n}-\overline{j^n}=\left(\overline{j}\right)^n-j^n+\left(\overline{\overline{j}}\right)^n-\overline{j}^n$$

$$S+\overline{S}=\overline{j}^n-j^n+j^n-\overline{j}^n=0$$

S est donc bien un imaginaire pur

Exemple3 : soit $u\in\mathbb{C}$ tel que $u\notin\mathbb{R}$

Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C})\ |1+uz|=|1+\overline{u}\cdot z|\Rightarrow\ z\in\mathbb{R}$

Solution :1) soit $z\in\mathbb{C}$ tel que :

$|1+uz|=|1+\overline{u}\cdot z|$

Donc : $|1+uz|^2=|1+\overline{u}\cdot z|^2$

Donc : $(1+uz)\overline{(1+uz)}=(1+\overline{u}\cdot z)\overline{(1+\overline{u}\cdot z)}$

Donc : $(1+uz)(1+\overline{u}\overline{z})=(1+\overline{u}\cdot z)(1+u\cdot\overline{z})$ Car : $\overline{\overline{u}}=u$

Donc : $1+uz+\overline{u}\overline{z}+uuz\overline{z}=1+u\overline{z}+\overline{u}z+u\overline{u}z\overline{z}$

Donc : $uz+\overline{u}\overline{z}=u\overline{z}+\overline{u}z$

Donc : $(u-\overline{u})z+(\overline{u}-u)\overline{z}=0$

Donc : $(u-\overline{u})(z-\overline{z})=0$

Et puisque : $u-\overline{u}\neq0$ car $u\notin\mathbb{R}$

Donc : $z-\overline{z}=0$ Donc : $z=\overline{z}$

Donc : $z\in\mathbb{R}$

Exercice 2: $z\in\mathbb{C}$

Ecrire en fonction de $\overline{z}$ le conjugué des nombres complexes suivants :

1) $Z_1=(2+i)(5-i)$ 2) $Z_2=2z+5i$ 3) $Z_3=\frac{z-1}{-3z+i}$

Solution :

1) $\overline{Z_1}=\overline{(2+i)(5-i)}=\overline{(2+i)}\times\overline{(5-i)}=(2-i)(5+i)$

2) $\overline{Z_2}=\overline{2z+5i}=\overline{2z}+\overline{5i}=2\overline{z}-5i$

3) $\overline{Z_3}=\overline{\left(\frac{z-1}{-3z+i}\right)}=\frac{\overline{z-1}}{\overline{-3z+i}}=\frac{\overline{z}-1}{-3\overline{z}-i}$

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z+i\overline{z}=5-4i$ 2) $z=2\overline{z}-2+6i$

Solution :1) $z\in\mathbb{C}$

donc : $\exists x\in\mathbb{R}$ et $\exists y\in\mathbb{R}\,/\,z=x+yi$

$2z+i\overline{z}=5-4i\Leftrightarrow 2(x+yi)+i(x-yi)=5-4i$

$(2x+y)+i(2y+x)=5-4i\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5\\2y+x=-4\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}2x+y=5\\-4y-2x=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5\\-4y-2x+2x+y=8+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5\\-3y=13\Leftrightarrow y=-\frac{13}{3}\end{cases}$

Donc : $x=\frac{14}{3}$ par suite: $z=\frac{14}{3}-\frac{13}{3}i$

Donc : $S=\left\{\frac{14}{3}-\frac{13}{3}i\right\}$

2) $z\in\mathbb{C}$ donc : $\exists x\in\mathbb{R}$ et $\exists y\in\mathbb{R}\,/\,z=x+yi$

$z=2\overline{z}-2+6i\Leftrightarrow x+yi=2(x-yi)-2+6i$

Donc : $S=\{2+2i\}$

Exercice4 : dans le plan complexe on considére le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U=(z-2i)(\overline{z}-1)$

Et $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

1)écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

3) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur

Solution :1) $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Donc : $U=(x+yi-2i)(x-yi-1)$

Donc : $U=(x+i(y-2))((x-1)-yi)$

Donc : $U=(x^2+y^2-x-2y)+i(-y-2x+2)$

Donc : $\operatorname{Re}(U)=x^2+y^2-x-2y$ et $\operatorname{Im}(U)=-y-2x+2$

2) U est réel ssi $\operatorname{Im}(U)=0\Leftrightarrow(\Delta):-y-2x+2=0$

Donc : l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel est la droite d'équation :

$(\Delta):-y-2x+2=0$

3) U est imaginaire pur ssi $\operatorname{Re}(U)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-x-2y=0$

$\Leftrightarrow x^2-2\times\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-2\times1y+1^2-1^2=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur est le cercle de centre : $\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$

et de rayon : $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$

Exercice5 :

A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z-3\overline{z}+1+2i=0$ 2) $z+(1-i)\overline{z}+3-2i=0$

3) $(3+i)z+\overline{z}=-i$

B) Déterminer les ensembles suivants :

1) (E1) = $\{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in \mathbb{R}\}$

2) (E2) = $\{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in i\mathbb{R}\}$

Exercice6 :Démontrer que :

$S=\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}-\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}$ est un nombre réel $\forall n\in\mathbb{Z}$

Solution : On a :

$\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}=\left(-\left(\sqrt{3}-i\right)\right)^{2n+1}=(-1)^{2n+1}\times\left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1}$

Donc: $\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}=-\left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1}$ car $(-1)^{2n+1}=-1$

Donc : $S=\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}+\left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1}$

$\overline{S}=\overline{\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}-\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}}=\overline{\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}}-\overline{\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}}$

$\overline{S}=\left(\overline{\sqrt{3}+i}\right)^{2n+1}-\left(\overline{i-\sqrt{3}}\right)^{2n+1}=\left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1}+\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}$

Donc : $\overline{S}=S$

donc S est bien un nombre réel.

Exercice7 : dans le plan complexe on considére le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U=2iz-\overline{z}$

Et $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

1)écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

Solution :1) $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Donc : $U=2i(x+yi)-(x-yi)=2ix-2y-x+yi$

Donc : $U=(-2y-x)+i(y+2x)$

Donc : $\mathrm{Re}(U)=-2y-x$ et $\mathrm{Im}(U)=y+2x$

2) U est réel ssi $\mathrm{Im}(U)=0 \Leftrightarrow (\Delta): y+2x=0$

Donc : l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel est la droite d'équation :

$(\Delta): y=-2x$

V) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1) Définition et applications

Définition : Soit $z=x+yi$ un nombre complexe avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

le réel positif $\sqrt{x^2+y^2}$ 2 s'appelle le module du nombre complexe z et on le note $|z|$

Exemple : calculer le module des nombres complexes suivants : 1) $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $z'=3-4i$

Solution :

$|z|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$

$|z'|=|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5;|-2i|=\sqrt{(-2)^2}=2$

Propriété : Soit $z=x+yi$ un nombre complexe ; on a $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\overline{z}}$

Preuve : en exercice

Exercice :

A) Déterminer les modules des complexes suivants :

1) $z_1=3+\sqrt{3}i$ 2) $z_2=\frac{1}{2}-\sqrt{3}i$ 3) $z_2=\frac{1}{1+i}$

4) $z_4=x$ où $x\in\mathbb{R}$

B) Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

1) $u_1=\frac{2+5i}{1+3i}$ 2) $u_2=\frac{1+i}{i-3\sqrt{2}}$ 3) $u_3=\left(2-\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)$

C) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : A(z) ;B($\overline{z}$) et C($\frac{1}{z}$) soit alignés.

2) Règle de calculs

Propriétés : Pour tous complexes z et z' et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a :

1) $|\overline{z}|=|-z|=|z|$ 2) $|z|^2=z\overline{z}$ 3) $|z|=1 \Leftrightarrow z\overline{z}=1$

4) $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$ 5) $|z\times z'|=|z|\times|z'|$

6) $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$ si $z\neq 0$

7) $|z^n|=|z|^n$ si $z\neq 0$ et $\forall n\in\mathbb{Z}$

8) $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

Exemple : calculer le module des nombres complexes suivants : 1) $z_1=5\left(1+i\sqrt{3}\right)$

2) $z_2=(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)$ 3) $z_3=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$

Solution :

1) $|z_1|=\left|-5\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|=|-5|\left|1+i\sqrt{3}\right|=5\sqrt{1+3}=10$

2) $|z_2|=\left|(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)\right|=|1+i|\times\left|\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{2}\times\sqrt{4}=2\sqrt{2}$

3) $|z_3|=\left|\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3\right|=\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|^3=\left(\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|\right)^3=\left(\frac{\left|1+i\sqrt{3}\right|}{|1-i|}\right)^3$

$|z_3|=\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3=2\sqrt{2}$

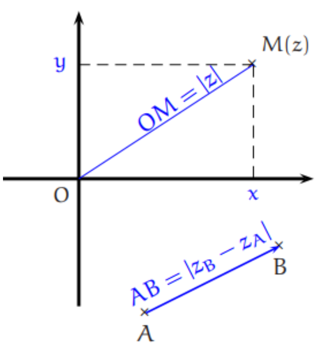
2) interpretation geometrique du module :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé soit M l'image du nombre complexe $z=x+iy$

avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ on a : $M(x;y)$ donc :

$\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=OM=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$

Donc : $|z|=OM$



Propriété : Si A et B ont pour affixes z_A et z_B , alors : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB=|z_B-z_A|$

Preuve : soit M tel que : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$

On a donc : $z_M=z_B-z_A$ avec z_M l'affixe de M

Donc : $|z_B-z_A|=|z_M|=OM=AB$

Exemple1 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$; les points A, B et C ont pour affixes: $z_A=2$ et $z_B=1+\sqrt{3}i$ et $z_C=3+i\sqrt{3}$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral

Solution : il suffit de montrer que : $AC=AB=BC$

$AB=|z_B-z_A|=\left|1+\sqrt{3}i-2\right|=\left|-1+\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$AC=|z_C-z_A|=\left|3+\sqrt{3}i-2\right|=\left|1+\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$BC=|z_C-z_B|=\left|3+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i\right|=|2|=2$

Donc : $AC=AB=BC$

Exemple2 : Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que : $|z-1-2i|=|z-7+2i|$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$|z-1-2i|=|z-7+2i| \Leftrightarrow |z-(1+2i)|=|z-(7-2i)|$

On pose : $A(z_A=1+2i)$ et $B(z_B=7-2i)$

$\Leftrightarrow |z_M-z_A|=|z_M-z_B| \Leftrightarrow AM=BM$

L'ensemble (Δ) cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

Methode1 : Méthode algébrique :

$z\in\mathbb{C}$ donc $\exists x\in\mathbb{R}$ et $\exists y\in\mathbb{R}$ tel que : $z=x+yi$

$|z-1-2i|=|z-7+2i| \Leftrightarrow |x+yi-1-2i|=|x+yi-7+2i|$

$\Leftrightarrow |x-1+i(y-2)|=|x-7+i(y+2)|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y+2)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=(x-7)^2+(y+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=x^2-14x+49+y^2+4y+4$

$\Leftrightarrow 12x-8y-48=0 \Leftrightarrow (\Delta): 3x-2y-12=0$

Exercice 8:Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z$tels que :a) $|z-3+i|=5$

b) $|z-4-5i|=|z+2|$

Solution :
a) Soit Ale point d'affixe $3-i$

$|z-3+i|=5 \Leftrightarrow AM=5$

L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 5.
b) Soient B et C les points d'affixes $4+5i$ et -2

$|z-4-5i|=|z+2| \Leftrightarrow BM=CM$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[BC]$

Exercice9 :Déterminer l'ensemble(C) des points Md'affixe z tels que : $|z-2i|=3$

Solution :
Methode1 : Méthode géométrique :

$|z-2i|=3$ On pose : $A(z_A=2i)$

$\Leftrightarrow |z_M-z_A|=3 \Leftrightarrow AM=3$

L'ensemble (C)cherché est le cercle de centre :

$A(0;2)$et de rayon : $R=3$

Methode1 : Méthode algébrique :

$z\in\mathbb{C}$ donc $\exists x\in\mathbb{R}$ et $\exists y\in\mathbb{R}$ tel que : $z=x+yi$

$|z-2i|=3 \Leftrightarrow |x+yi-2i|=3 \Leftrightarrow |x+i(y-2)|=3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}=3 \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-2)^2=3^2$

L'ensemble (C)cherché est le cercle de centre :

$A(0;2)$et de rayon : $R=3$

Exercice10 : Déterminer l'ensemble(Δ) des points M d'affixe z tels que : $|iz+3|=\left|\frac{1}{i}z-4i+1\right|$

Solution :
Methode1 : Méthode géométrique :

$|iz+3|=\left|\frac{1}{i}z-4i+1\right| \Leftrightarrow |i(z-3i)|=\left|\frac{1}{i}(z+4+i)\right|$

$\Leftrightarrow |z-3i|=|z+4+i|$ car $|i|=\left|\frac{1}{i}\right|=1$

$\Leftrightarrow |z-3i|=|z-(-4-i)|$

On pose : $A(z_A=3i)$ et $B(z_B=-4-i)$

$\Leftrightarrow |z_M-z_A|=|z_M-z_B| \Leftrightarrow AM=BM$

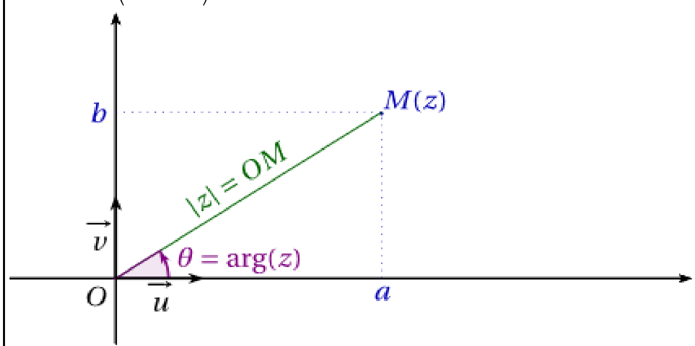
L'ensemble (Δ)cherché est la médiatrice du

segment$[AB]$

VI) FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

1) L'argument d'un nombre complexe non nul.

Définition :Le plan complexe est menu d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.Soit z un nombre complexe non nul et $M(z)$ son image. On appelle argument du nombre complexe z une mesure (en radian) de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ On le note par $arg(z)$



Exemple : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{u};\vec{v})$;

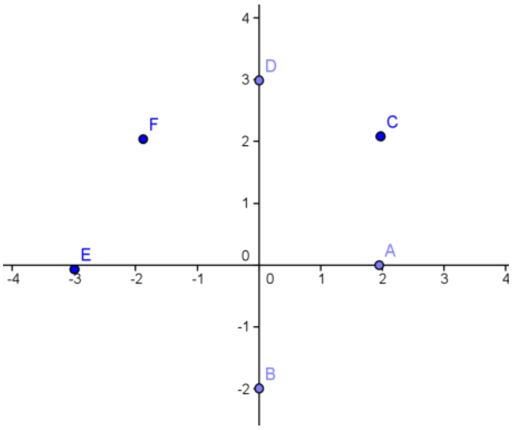
on considère les points A ; B ;C ;D ;E ;F qui ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = -2i$ et $z_C = 2+2i$ et

$z_D = 3i$ et $z_E = -3$ et $z_F = -2+2i$

1)Représenter les points A ; B ;C ;D ;E ;Fdans Le plan complexe
2)on utilisant la représentions déterminer l'argument des complexe : z_A et z_B et z_C et

z_D et z_E et z_F

Solution :1)



2) $\arg z_A = 0[2\pi]$ et $\arg z_B = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_C = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\arg z_D = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_E = \pi[2\pi]$ et $\arg z_F = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Remarque : le complexe nul n'a pas d'argument

Propriété : $z \in \mathbb{C}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$

1) $z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi]$ 2) $z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$

3) $\arg(iy) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y \succ 0$ et $\arg(iy) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y \prec 0$

4) $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z[2\pi]$ 5) $\arg \bar{z} \equiv -\arg z[2\pi]$

Exemple : $\arg(5i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\arg(-3i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg(2) \equiv 0[2\pi]$ et $\arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$

2) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul, on a donc

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ et par suite :

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Or : si $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

alors : $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Et finalement : $z = |z|(cos\theta + i\ sin\theta)$

Propriété : Tout nombre complexe non nul z à une écriture de la forme $z = |z|(cos\theta + i\ sin\theta)$
Où $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$
Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe non nul $\boldsymbol{z}$

Exercice11 :
Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

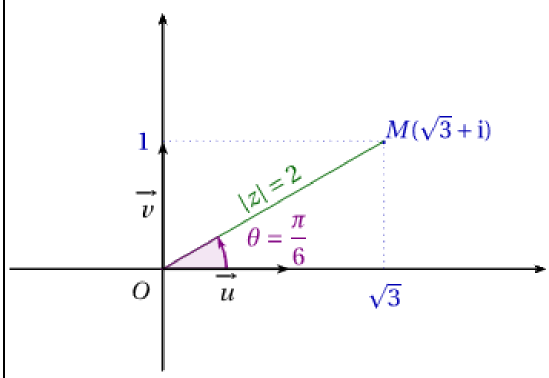
1) $z_1 = \sqrt{3} + i$ 2) $z_2 = 1 - i$ 3) $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$

4) $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$ 5) $z = 7$ 6) $z = -12$

Solution :1) $|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$$z_1 = \sqrt{3} + 1i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\arg z_1 \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$



2) $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Et on a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ donc :

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\qquad \arg z_2\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

3) $z_3=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i \qquad |z_3|=\sqrt{\frac{3}{36}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$z_3=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Et on a : $\sin(\pi-x)=\sin x$ et $\cos(\pi-x)=-\cos x$

Donc:

$$z_3=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

4) $z_3=-1-\sqrt{3}i$

$$|z_3|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$$

$$z_3=-1-\sqrt{3}i=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$\sin(\pi+x)=-\sin x$ et $\cos(\pi+x)=-\cos x$

$$z_4=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

Propriété : $z\in\mathbb{C}^*$

Si on a $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r\succ 0$

Alors $|z|=r$ et $\arg z\equiv\theta[2\pi]$

Exemple : Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants avec $\theta\in]-\pi;\pi[-\{0\}$

1) $z_1=\sin\theta+i\cos\theta$ 2) $z_2=1-\cos\theta-i\sin\theta$

3) $z_3=\sin\theta+2i\sin^2\frac{\theta}{2}$

Solution : 1)

$$z_1=\sin\theta+i\cos\theta=1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

Donc : c'est forme trigonométrique du nombre complexe z_1 donc $|z_1|=1$ et $\arg z\equiv\frac{\pi}{2}-\theta[2\pi]$

2) $z_2=1-\cos\theta-i\sin\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}-i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$z_2=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$z_2=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$z_2=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

• Si $\theta\in]0;\pi[$ alors : $\frac{\theta}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2}\succ 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 est :

$$z_2=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$|z|=2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg z\equiv\frac{\theta-\pi}{2}[2\pi]$

• Si $\theta\in]-\pi;0[$ alors : $\frac{\theta}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2}\prec 0$

$$z_2=-2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z_2=-2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z_2=-2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)\right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 et on a :

$|z|=-2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg z\equiv\frac{\theta+\pi}{2}[2\pi]$

3) $z_3=\sin\theta+2i\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}+2i\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$z_3=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

• Si $\theta \in]0;\pi[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2} \succ 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre complexe z_3 est : $z_3 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$|z| = 2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg z \equiv \frac{\theta}{2}[2\pi]$

• Si $\theta \in]-\pi;0[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2} \prec 0$

$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 et on a :

$|z| = -2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg z \equiv \pi + \frac{\theta}{2}[2\pi]$

3) Règles de calculs sur les arguments :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ et $\arg(z') \equiv \theta'\ [2\pi]$

On donc :

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$

et par suite :

$zz' = |z||z'|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$= |z||z'|(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta')$

$= |z||z'|(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta)) = |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$

(En utilisant les formules de transformations)

Propriété principale : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, on a :

$\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

Propriété Règles de calculs pour les arguments :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

1) $\arg(1/z) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

2) $\arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

3) $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$

4) $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$

5) $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

Preuves (en exercice)

Notations : Soit z un nombre complexe dont la forme trigonométrique est : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ c'est-à-dire $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

On écrit : $z = [r, \theta]$

Règles de calculs :

1) $[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta\theta']$

2)$1/[r, \theta] = [1/r, -\theta]$

3)$[r, \theta] / [r', \theta'] = [r/r', \theta - \theta']$

4) $-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$

5) $\overline{[r;\theta]} = [r, -\theta]$

6) $[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$

Ces propriétés ne sont que l'assemblage des propriétés sur les calculs des modules et les calculs des arguments.

Exemple :on considère les nombres complexes :

$z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$ et $U = z_1^6 \times z_2^2$

1)Ecrivez les nombres complexe z_1 ; z_2 et Z et Sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe Z Sous sa forme algébrique puis en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Solution :1) $z_1 = \sqrt{3} - i$

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Donc : $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

On a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

Donc : $z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left[2; -\frac{\pi}{6}\right]$

On a : $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$U=z_1^6\times z_2^2=\left[2;-\frac{\pi}{6}\right]^6\times\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]^2$$

$$U=\left[2^6;-\pi\right]\times\left[2;-\frac{\pi}{2}\right]=\left[2^7;-\pi+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$U=2^7\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)=2^7\left(0+1i\right)=2^7 i$$

2)

$$Z=\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(1+i\right)}{\left(1-i\right)\left(1+i\right)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-i+1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$Z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Donc : $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

Exercice12 : Ecrire le complexe $Z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^8$

Sous sa forme algébrique

Solution : On va d'abord écrire $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$

Sous la forme trigonométrique

$$u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc : $Z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^8=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]^8$

$$Z=\left[\sqrt{2}^8;\frac{8\pi}{3}\right]=16\left(\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$Z=16\left(\cos\frac{6\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi+2\pi}{3}\right)$$

$$Z=16\left(\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$Z=16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Z=-8+8\sqrt{3}i$$

Exercice 13 : Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z dans les cas suivants :

1) $z=\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 2) $z=-5-5i$ 3) $z=-6+6\sqrt{3}i$

4) $z=(3-3i)^4$ 5) $z=-2-2\sqrt{3}i$ 6) $z=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$

7) $z=\left(\sqrt{3}+3i\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 8) $z=\frac{1}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$

9) $z=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$

4) Les formes trigonométriques des racines carrées .

Définition : On appelle racine carrée d'un complexe z tout complexe u tel que $u^2=z$

Remarque : Un complexe non nul admet deux racines carrées.

Preuve : d'une propriété :

Soit $z=[r,\theta]$ un complexe non nul et $u=[\rho,\alpha]$ une racine de z donc $u^2=z$ ce que se traduit

par : $\begin{cases}\rho^2\equiv r\\ 2\alpha\equiv\theta+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho\equiv\sqrt{r}\\ \alpha\equiv\frac{\theta+2k\pi}{2}\end{cases}$ avec $k\in\{0;1\}$

Propriété : Soit $z=[r,\theta]$ un complexe non nul ; les racines carrées de $[r,\theta]$ sont les complexes :

$$u_1 = \left[\sqrt{r};\frac{\theta}{2}\right] \text{ et } u_2 = \left[\sqrt{r};\frac{\theta}{2}+\pi\right] = -u_1$$

Exemple :Déterminer les racines carrées de

$z = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$? On a : $|z|=1$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Donc les racines carrées de z sont :

$$u_1 = \left[1;\frac{\pi}{12}\right] = \cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12} \text{ et } u_2 = -u_1$$

Exercice14 : Soit le complexe :

$$u = \left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$$

1) Calculer u^2 puis déterminer la forme trigonométrique de u^2

2) En déduire la forme trigonométrique de u

VI) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES

1) Angles orientés et argument.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$;

On sait que si le nombre complexe z est non nul alors : $\left(\vec{e_1};\overrightarrow{OM}\right) \equiv \arg z\,[2\pi]$

□ Soit z et z' deux complexes non nuls d'images respectives M et M', on a

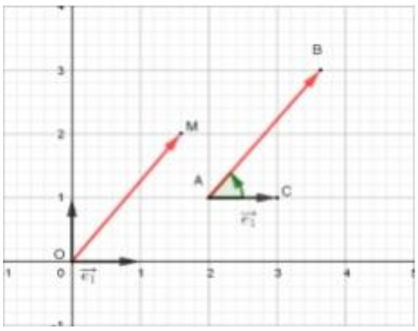
$$\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OM};\vec{e_1}\right)+\left(\vec{e_1};\overrightarrow{OM'}\right)[2\pi]$$

$$\equiv -\left(\vec{e_1};\overrightarrow{OM}\right)+\left(\vec{e_1};\overrightarrow{OM'}\right)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \arg z' - \arg z\,[2\pi] \equiv \arg\frac{z'}{z}[2\pi]$$

Soient A et B deux points dans le plan complexe d'affixes respectifs a et b, on sait qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}$ et M aura

Pour affixe le complexe $(b - a)$



Donc : $\left(\vec{e_1};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(b-a)[2\pi]$

Soient A, B et C trois points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs a, b et c, on a :

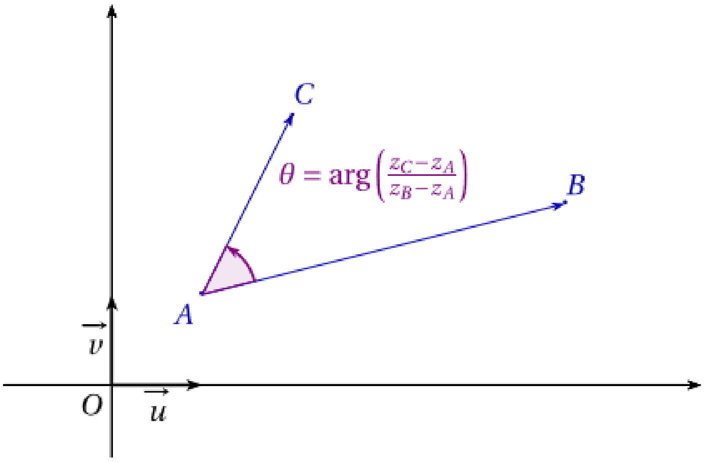
$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB};\vec{e_1}\right)+\left(\vec{e_1};\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv -\left(\vec{e_1};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\vec{e_1};\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv -\arg(b-a)+\arg(c-a)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg(c-a)-\arg(b-a)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$$



Soient A, B, C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs a, b, c et d

on a : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right)+\pi[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)+\arg\left(\frac{d-c}{a-c}\right)+\arg(-1)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg-\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\left(\frac{d-c}{a-c}\right)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$$

Propriété :1) Soient M et M' et A, B, C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs z, z', a, b, c et d on a :

1) $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi]$

2) $\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(b-a)[2\pi]$

3) $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

4) $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$

Exemple : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $z_A = 3+5i$,

$z_B = 3-5i$ et $z_C = 7+3i$

1)montrer que : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$

2)monter que ABC est un triangle rectangle et que : $BC = 2AC$

Solution :1) $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-4-8i}{-4+2i} = \frac{2i(-4+2i)}{-4+2i} = 2i$

$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_c}{z_A - z_C}\right)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) \equiv \arg(2i)[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : ABC est un triangle rectangle en C

On a **:** $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$ donc: $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = |2i|$

Donc : $\frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = 2$ donc: $\frac{BC}{AC} = 2$

Donc : $BC = 2AC$

Exemple15 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé$\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$;

Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a = 2i$, $b = \sqrt{2}(1+i)$ et

$c = a+b$

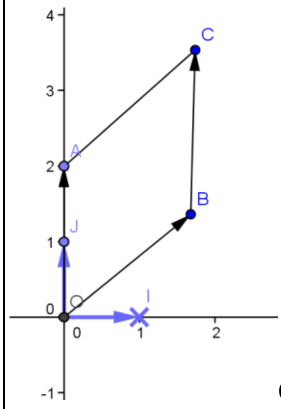
1)Montrer que OBCA est un losange

2) Montrer que : $\arg c \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Solution :

1)On a : $c = a+b$ donc : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Donc OBCA est un parallélogramme



on a : $|a-0| = |2i| = 2 = OA$

$OB = |b-0| = \left|\sqrt{2}(1+i)\right| = \left|\sqrt{2}\right|\left|(1+i)\right| = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$

alors : $OB = OA$

donc OBCA est un losange

2) $\arg c \equiv \left(\vec{i};\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$

$\equiv \left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$

$\equiv \left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)[2\pi]$ (OBCA : losange)

$\equiv \arg b + \frac{1}{2}\arg\frac{a}{b}[2\pi]$

$\equiv \arg b + \frac{1}{2}(\arg a - \arg b)[2\pi]$

Donc : $\arg c \equiv \frac{1}{2}(\arg a + \arg b)[2\pi]$

Or : $a = 2i$ donc : $\arg a \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Et : $b = \sqrt{2}(1+i) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$b = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\arg b \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\arg c \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

Donc : $\arg c \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Exercice16 : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a=2+i$, $b=3+2i$ et $c=5-i$

Soit α une mesure de l'angle orienté : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Calculer $\tan\alpha$

Solution : On a : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

Donc : $\alpha=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{3-2i}{1+i}=\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-5i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

Donc : $\frac{c-a}{b-a}=\frac{\sqrt{26}}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

Donc : $\sqrt{26}\cos\alpha=1$ et $\sqrt{26}\sin\alpha=-5$

Donc : $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$ et $\sin\alpha=\frac{-5}{\sqrt{26}}$

Donc : $\tan\alpha=-5$

Exercice17 : On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_1=-\sqrt{2}$ et $z_2=1+i$ et $z_3=1-i$

1) Placer dans le repère $\mathcal{R}$ les points A, B et C

2) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ et déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$

3) Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[BC]$ et en déduire que : $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$

4) Ecrivez le nombre $\frac{z_1-z_2}{z_1}$ sous sa forme algébrique puis en déduire cos $\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et sin $\left(\frac{\pi}{8}\right)$

2) Applications

2.1 Alignement de 3 points.

Corolaire : Trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv 0[2\pi]$

Preuve : On sait que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

Et $\frac{c-a}{b-a}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ où $\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=r$ et

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\theta[2\pi]$

$A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv k\pi[2\pi]\Leftrightarrow\frac{c-a}{b-a}=r$ ou $\frac{c-a}{b-a}=-r$

$$\Leftrightarrow\frac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R}$$

Exercice18 :1° Vérifier que les points $A(5+3i)$; $B(2+i)$ et $C(-1-i)$ sont alignés

2° Est ce que les points $M(-2+2i)$, $N(2-i)$ et $N(1-i)$ sont alignés ?

2.2 droites parallèles

Corolaire : $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ et D(d)

$(AB)\parallel(CD)$ si et seulement si : $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\equiv 0[2\pi]$

Ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\equiv\pi[2\pi]$

2.3 droites perpendiculaires

Corolaire : $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ et D(d)

$(AB)\perp(CD)$ si et seulement si :

$\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

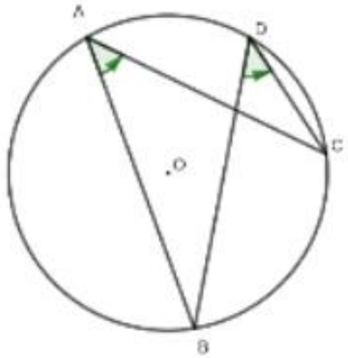
2.4 Cocyclicité de 4 points.

Rappelle : Soit (C) le cercle qui circonscrit le triangle ABC, le point D appartient au cercle (C) si et seulement si :

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)[2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\pi-\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)[2\pi]$

1ier CAS :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)\quad[2\pi]$$

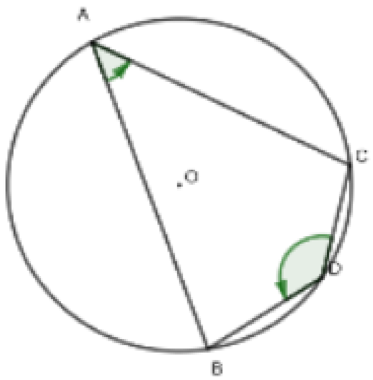


Ceci se traduit par :

$$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv arg\left(\frac{c-d}{b-d}\right)\quad[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)-arg\left(\frac{c-d}{b-d}\right)\equiv 0\quad[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow arg\left[\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\times\left(\frac{b-d}{c-d}\right)\right]\equiv 0\quad[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\times\left(\frac{b-d}{c-d}\right)\in\mathbb{R}^{*+}$$

2ier CAS :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\pi-\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right)\quad[2\pi]$$



Ceci se traduit par :

$$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\pi-arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right)\quad[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)+arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right)-\pi\equiv 0\quad[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow arg\left[\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\times\left(\frac{b-d}{c-d}\right)\times(-1)\right]\equiv 0\quad[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\times\left(\frac{b-d}{c-d}\right)\in\mathbb{R}^{*-}$$

Théorème : Soit $A(a)$,$B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ quatre points dans le plan complexe.
Les points A,B,C et D sont cocycliques si et seulement si : $\frac{c-a}{b-a}\times\frac{b-d}{c-d}\in\mathbb{R}^*$

Exercice19 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$Z=\frac{5z-2}{z-1}$ Soit un imaginaire pur.

Solution : Pour répondre à cette question, on peut écrire Z sous forme algébrique et dire que sa partie réelle est nulle ou il suffit de calculer la partie réelle.
Il faut que z≠1 . On note A(1)

$z\in\mathbb{C}$ donc $\exists x\in\mathbb{R}$ et $\exists y\in\mathbb{R}$ tel que : $z=x+yi$

$$Z=\frac{5z-2}{z-1}=\frac{5x-2+5iy}{x-1+iy}=\frac{(5x-2+5iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z=\frac{\left(5x^2-5x-2x+2+5y^2\right)+i\left(-5xy+2y+5xy-5y\right)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z=\frac{\left(5x^2-7x+2+5y^2\right)-3iy}{(x-1)^2+y^2}$$

Z est un imaginaire pur

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{5x^2+5y^2-7x+2}{(x-1)^2+y^2}=0\\ z\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+5y^2-7x+2=0\\ x\neq 1 ou y\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}=0$$

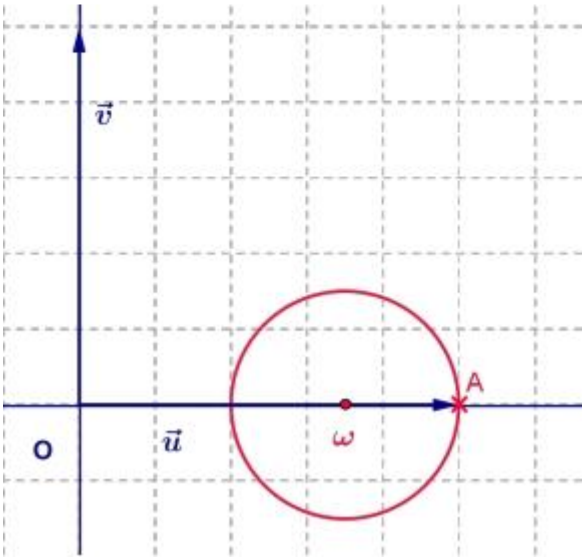
$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2-\frac{49}{100}+\frac{2}{5}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2=\frac{9}{100}$$

Il s'agit de l'équation du cercle (C) de centre

ω($\frac{7}{10}$ +0 i) et de rayon $\frac{3}{10}$.

Le point A(1) appartient à (c).
L'ensemble cherché est donc le cercle (C) privé de A.



Exercices20 :
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right|=1$

Solution :

Première méthode (méthode algébrique)

$z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

On doit avoir : $z\neq -1+i$

$z-2=x-2+yi$

$z+1-i=x+1+i(y-1)$

$\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+1-i|}=1$

$\Leftrightarrow |z-2|=|z+1-i|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=(x+1)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=x^2+2x+1+y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow -6x+2y+2=0 \Leftrightarrow y=3x-1$

L'ensemble cherché est la droite (D) d'équation

$y=3x-1$

Deuxième méthode (méthode géométrique)

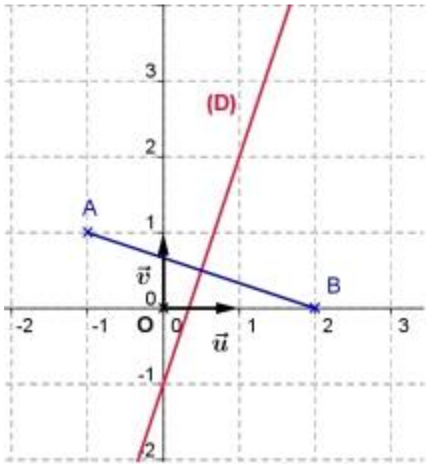
On pose : A(−1+i) et B(2) et M (z)

$\overrightarrow{AM}(z+1-i)$ donc $|z+1-i|=AM$

$\overrightarrow{BM}(z-2)$ donc $|z-2|=BM$

$\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+1-i|}=1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM}=1 \Leftrightarrow BM=AM$

L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment [AB].



Exercice21 :soit a et b et c des nombres complexes tels que : $|a|=|b|=|c|=1$ et $a\neq c$ et $b\neq c$

1)Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$

2)en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)\equiv\frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Solution : $\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}}=\left(\frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{a}}\right)^2\times\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$

On a si : $|z|=1$ alors : $\overline{z}=\frac{1}{z}$ donc :

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2\times\frac{a}{b}}=\left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2\times\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}=\left(\frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{a-c}{ac}}\right)^2\times\frac{b}{a}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{b}{a}$$

Donc : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2)puisque : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ alors :

$$\arg\left(\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$$

Donc : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 + \arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$

Donc : $2\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv -\arg\left(\frac{a}{b}\right)[\pi]$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

Bon courage