LIMITE D'UNE FONCTION

I) RAPPELLES ET COMPLEMENTS.

$]a,b[=\{x\in\mathbb{R}/a<x<b\}$

- Le centre de l'intervalle $]a,b[$ est le réel $x_0=\frac{a+b}{2}$
- Le rayon de l'intervalle $]a,b[$ est le réel positif $r=\frac{b-a}{2}$

Activité :

Déterminer les bornes d'un intervalle ouvert de centre x_0 et de rayon r (deux réels données)

Définition :

L'ensemble : $]a,b[^*=\{x\in\mathbb{R}/a<x<b\}/\{x_0\}$ où x_0 est le centre de l'intervalle $]a,b[$, s'appelle l'intervalle pointé de bornes a et b.

Remarque :

Si r est le rayon de l'intervalle $]a,b[$ et x_0 son centre alors : $]a,b[^*=]x_0-r,x_0+r[/\{x_0\}$

Activité :

Montrer que $x\in]x_0-r,x_0+r[/\{x_0\}\Leftrightarrow 0<|x-x_0|<r$

Activité :

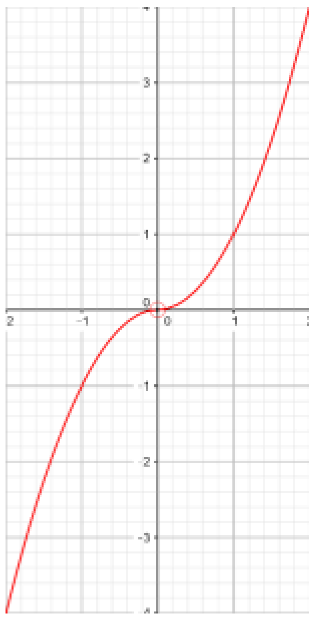
1-Rappeler l'image d'un ensemble par une application.

2- Rappeler $f(A)\subset B$

3- Traduire en utilisant les valeurs absolues : $f(]x_0-r,x_0+r[^*)\subset]l-\beta,l+\beta[$

II) LIMITE NULLE EN 0.

Considérons la fonction : $\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\frac{x^3}{|x|}\end{aligned}$



1- Déterminer l'ensemble de définition de f.

2- Ecrire des expressions de f sur des intervalles sans valeur absolue.

3- La courbe de f est ci-contre :

a)- Déterminer un réel α tel que : $f(]-\alpha,\alpha[^*)\subset]-2,2[$

b)- Déterminer un réel α tel que : $f(]-\alpha,\alpha[^*)\subset]-10^{-2},10^2[$

c)- Déterminer un réel α tel que : $f(]-\alpha,\alpha[^*)\subset]-\varepsilon,\varepsilon[$

En répondant à la question 3-c) on peut conclure que :

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<|x|<\alpha\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$$

On dit que la fonction f admet 0 comme limite en 0. et on écrit : $\lim_{x\to0}f(x)=0$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre 0. On dit que f admet la limite 0 en 0 si elle vérifie la propriété suivante : $(\forall\varepsilon>0)(\exists\alpha>0)(\forall x\in D_f)(0<|x|<\alpha\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$. On écrit : $\lim_{x\to0}f(x)=0$.

Remarques :

- ✓ Le faite que f est définie sur un intervalle pointé est essentielle. $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$ est définie en 0 et n'admet pas de limite en 0. $D_g = \{0\}$.
- ✓ On a pas préciser si dans la définition si f est définie en 0 ou non, même si f est définie en 0, l'image de f en 0 n'affecte pas sur la limite.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x \mapsto \frac{x^3}{|x|} \; si \; x \neq 0 \\ 0 \mapsto 5 \end{cases}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x \mapsto \frac{x^3}{|x|} \; si \; x \neq 0 \\ 0 \mapsto -3 \end{cases}$$

On a : $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$

Propriété :

Si f et g sont confondues sur un intervalle pointé de centre 0 et si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

Propriété :

Les fonctions : $x \mapsto x^n \; (n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \sqrt{|x|}$; $x \mapsto kx$ tendent vers 0 quand x rend vers 0.

III) LIMITE FINIE l EN a.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a si : $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - l) = 0$. c.-à-d. :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Exercice : Montrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{x\to x_0} (ax + b) = (ax_0 + b) \quad (a \neq 0)$$

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + 1) = 2.$$

Propriété :

Si P est une fonction polynôme alors : $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$

Une fonction polynôme P c'est une fonction qui s'écrit de la forme : $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$

Exemple :

$$\lim_{x\to 2} 3x^2 + x + 3 = 17.$$

Propriété :

Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Application :

Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} x sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Propriété :

Si f et g sont confondues sur un intervalle pointé de centre a et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

Exemple :

On se propose d'étudier la limite de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ en 0.

On remarque que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(f(x) = \frac{x^2}{x(1+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} = g(x))$ (on a multiplié par le conjugué)

D'autre part : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(|g(x)| \leq |x|)$ et puisque : $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

et par suite : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Propriété :

Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a ; on a : $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

Remarque :

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = l \Leftrightarrow ou \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = -l \end{array} \right.$$

Propriété :

Si f admet une limite l en a alors cette limite est **unique.**

III) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE.

1) Définition

Activité :

Soit la fonction $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto x - E(x) \end{array}$ où E désigne la partie entière.

1- Ecrire les expressions de f sans utiliser la partie entière sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,2[$.

2- Construire la courbe de la restriction de f sur $[0,2]$.

3- La fonction f admet-elle une limite en 1.

4- Soit la fonction $g(x) = x$ et $h(x) = x - 1$

a) Remarquer que f et g sont confondues sur $]0,1[$ et que f et h sont confondues sur $]1,2[$

b) déterminer les limite de g et de h en 1.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ où $r > 0$ et l un réel.

On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a à droite si la proposition suivante est vraie :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

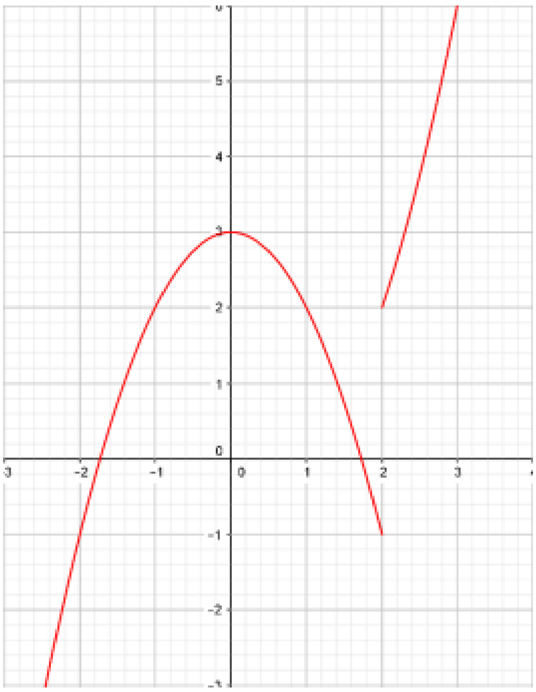
Et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$

Exercice :

La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par morceaux comme suite :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$\begin{cases} x\mapsto x^2-x & si\ x\geq 2 \\ x\mapsto 3-x^2 & si\ x<2 \end{cases}$$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction f à droite et à gauche de 2.



Exercice :

Soit la fonction g définie par :

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$\begin{cases} x\mapsto 2x^2-x+3 & si\ x\geq 1 \\ x\mapsto -x^2+x+\alpha & si\ x<1 \end{cases}$$

Déterminer α pour que la fonction g admet une limite en 1.

Théorème :

Une fonction f admet une limite l en a si et seulement si elle admet une limite à droite de a égale à sa limite à gauche de a égale à l.

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l \end{cases}$$

2) Propriétés

Toutes les propriétés mentionnées au paravent sont vraie à droite et à gauche de a en tenant compte des conditions

Propriété :

Si sur un intervalle de la forme $]a,a+r[$ on a: $|f(x)-l|\leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} u(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$

Propriété :

Si f et g sont confondues sur un intervalle de la forme $]a,a+r[$ et si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=l$

Propriété :

Si sur un intervalle de la forme $]a,a+r[$ on a : $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+} h(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$

On peut citer les même propriétés à gauche de a.

3) Opérations sur les limites finies.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions tels que : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l'$ on a :

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=l+l'$$
$$\lim_{x\to a}(f\times g)(x)=l\times l'$$
$$\lim_{x\to a}(|f|)(x)=|l|$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l'} \qquad l' \neq 0$$
$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'} \qquad l' \neq 0$$
$$\lim_{x \to a} \left(\sqrt{f}\right)(x) = \sqrt{l} \qquad l > 0$$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel a.

Exemple :

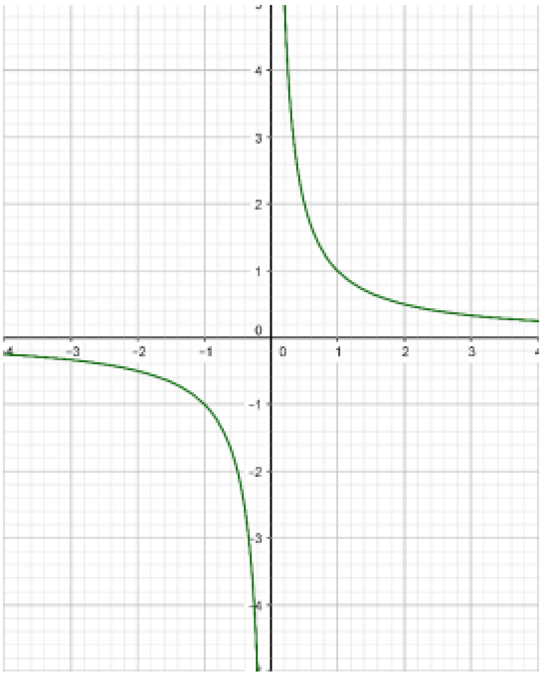
$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{3x^2+1}+2x+1}{2x^2+3} = \frac{1}{5}$$

IV) EXTENTION DE LA NOTION DE LIMITE.

1) Limite infinie à droite (à gauche) de a.

Activité :

Considérons la fonction $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$



La courbe représentative de f est l'hyperbole de centre $O(0,0)$

1- Compléter le tableau suivant :

x	10^{-2}	10^{-6}	10^{-20}	…	10^{-p}
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons $A = 10^{100}$ déterminer un réel α tel que si $0 < x < \alpha$ alors $f(x) > 10^{100}$.

Montrer que :

(P) : $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

La propriété (P) veut dire qu'on peut rendre $f(x)$ aussi grand qu'on veut ; on dit que la limite de f est $+\infty$ quand x tend vers 0 à droite et on écrit : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ où $r > 0$, on dit que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a adroite si $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$

On écrit : $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

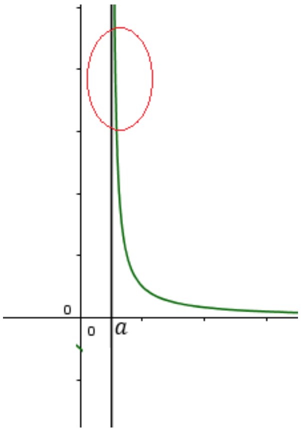
Propriétés :

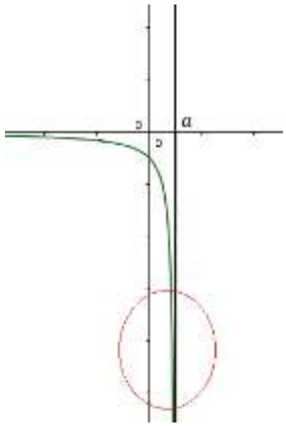
les fonctions $x \mapsto \frac{k}{|x|}$; $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}}$ et $x \mapsto \frac{k}{|x|^n}$ où k un réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}^*$, tendent vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

Définitions :

- ✓ $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$: $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$
- ✓ $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$: $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$
- ✓ $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$: $(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$

Interprétations géométriques :





$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Exercice : Compléter l'interprétation géométrique.

Définition :

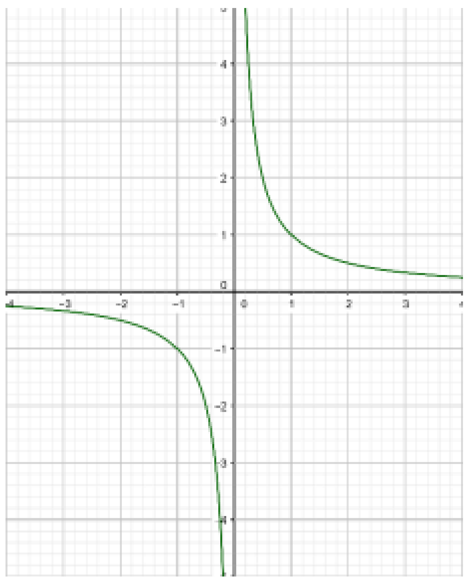
Si la fonction f vérifie l'une des limites suivantes :

$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

Alors, on dit que la droite $(\Delta): x = a$ est une **asymptote verticale.**

2) Limites finies en $\pm\infty$

Activité : Considérons la fonction $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$



La courbe représentative de f est l'hyperbole de centre $O(0,0)$

1- Compléter le tableau suivant :

x	10^2	10^6	10^{20}	…	10^p
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons $\varepsilon = 10^{-100}$ déterminer un réel B tel que si $x > B$ alors

$|f(x)| < \varepsilon$.

En général, montrer que :

(P) : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (a un réel quelconque) et l un réel, on dit que la fonction f tend l quand x tend vers $+\infty$ si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

On écrit : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$

Propriétés :

les fonctions $x \mapsto \frac{k}{|x|}$; $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}}$ et $x \mapsto \frac{k}{|x|^n}$ où k un réel donné et $n \in \mathbb{N}^*$, tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

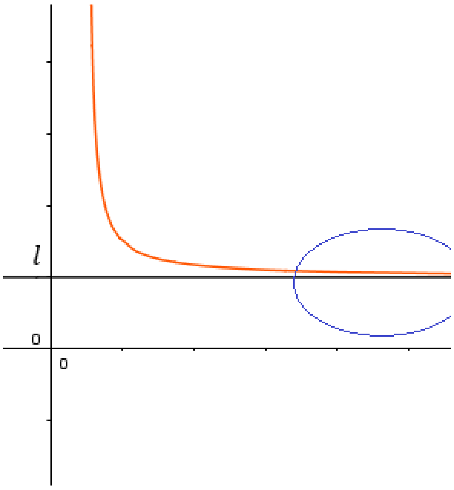
Définitions :

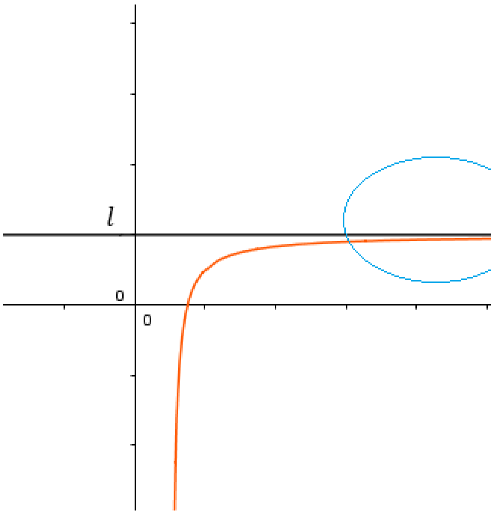
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ (a un réel quelconque) et l un réel, on dit que la fonction f tend l quand x tend vers $-\infty$ si : $(\forall\varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

On écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

Interprétation géométrique :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$





Completer les autres intérprétations.

Définition :

Si la fonction f vérifie l'une des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

Alors, on dit que la droite $(\Delta): y = l$ est une **asymptote horizontale.**

Remarque :

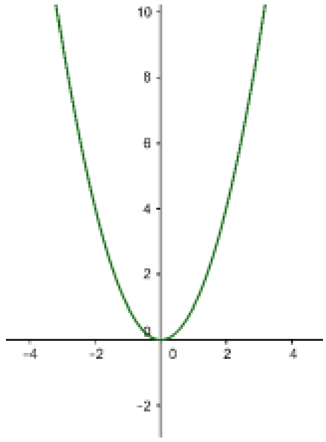
La position de la courbe C_f par rapport à son asymptote horizontale se détermine par le signe de $f(x) - l$:

- Si $f(x) - l \geq 0$ alors C_f est au-dessus de $(\Delta): y = l$
- Si $f(x) - l \leq 0$ alors C_f est au-dessous de $(\Delta): y = l$

3) Limite infinies en $\pm\infty$

Activité : Considérons la fonction $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

La courbe représentative de f est la parabole de centre $O(0,0)$



1- Compléter le tableau suivant :

x	10^2	10^6	10^{20}	…	10^p
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons $A = 10^{100}$ déterminer un réel B tel que si $x > B$ alors

$f(x) > A$.

En général, montrer que :

(P) : $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$

Définition :

Soit f une fonction $]a, +\infty[$ (où a est un réel quelconque) on dit que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si : $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$; on écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Propriété :

Les fonctions $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ tendent $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

Définitions :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x > B \Rightarrow f(x) < -A)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x < -B \Rightarrow f(x) > A)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D_f)(x < -B \Rightarrow f(x) < -A)$

Remarque :

Pour l'interprétation géométrique, il y' a plusieurs cas qu'on va étudier par la suite (Etude de fonction).

V) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

1) Limites et ordres.

Propriété :

Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Propriété :

Si f et g sont confondues sur un intervalle pointé de centre a et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$

Propriété :

Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si x tend vers a à droite, ou a à gauche , ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

Propriété

- Si sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ on a : $u(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x\to a^+} u(x) = +\infty$ alors : $\lim_{x\to a^+} v(x) = +\infty$
- Si sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ on a : $u(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x\to a^+} v(x) = -\infty$ alors : $\lim_{x\to a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si x tend vers a à gauche , ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

Exercice :

Soit $f(x) = \frac{2+sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(f(x) \geq \frac{1}{x^2})$

2- En déduire $\lim_{x\to o} f(x)$

2) Opérations sur les limites

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises et on peut les démontrer en utilisant les définitions des limites.

1) Limite de la somme

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a}(f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Formes indéterminées**

Ces propriétés sont vraies si x tend vers a^+ ; a^- ; $+\infty$ ou $-\infty$

Formes indéterminées : Veut dire qu'on peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calcules car il y a plusieurs cas.

Exemples :

❶ $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x^2$ on a $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{g(x)} = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = 7$

❷ $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x$ on a $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{g(x)} = -\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - x + 7 = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = +\infty$$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

2) Limites des produits

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		$\pm\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x\to a}(f \times g)(x)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**Formes indéterminées**

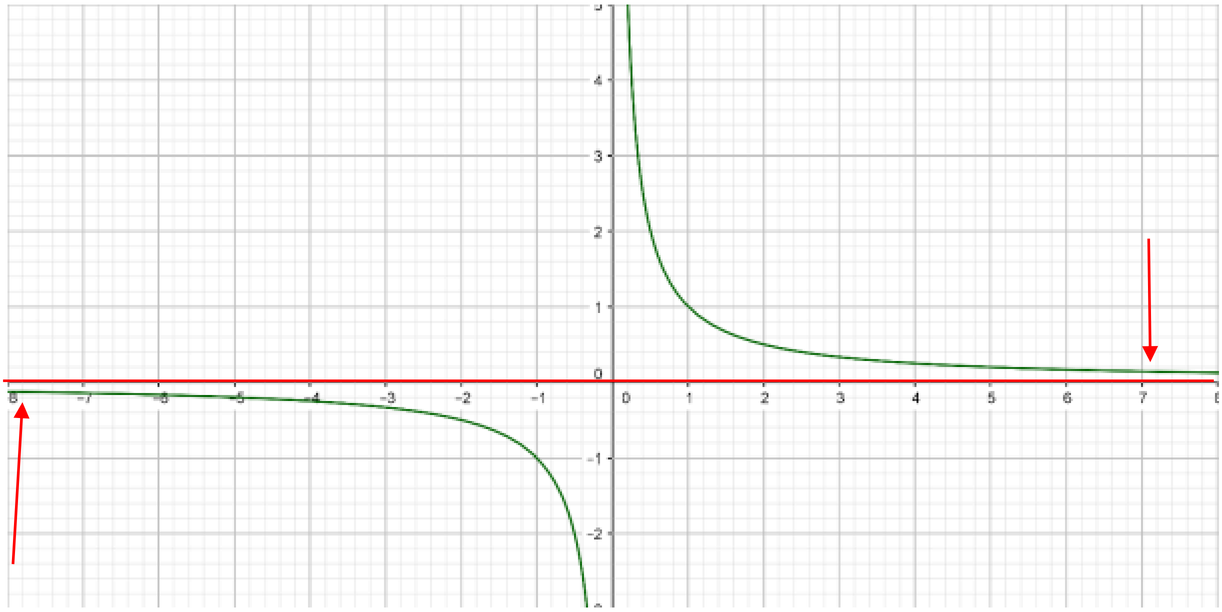
3) Limites des inverses

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarque : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+$ veut dire que f tend vers 0 mais de la droite.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0\ (0^+)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0\ (0^-)$ chose qu'on voit bien sur la courbe de la fonction f



3) Limites des quotients

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$ ou $+\infty$		$l<0$ ou $-\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Formes indéterminées	Formes indéterminées

Exemple :

On veut déterminer la $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+1}{x^2+x-2}$ on a :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}(3x+1) = 4\\ \lim\limits_{x\to1^+}(x^2+x-2) = 0^+\end{cases}$

Donc $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+1}{x^2+x-2} = +\infty$

Remarque :

- Eviter d'écrire ces expressions qui n'ont pas de sens mathématique : $\frac{?}{0^+}, \frac{?}{0^-}$
- Ne pas utiliser $+\infty$ ou $-\infty$ dans les opérations dans $\mathbb{R}$ ($+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels)

Exercices

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$ $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

3) Limites d'une fonction polynôme en $\pm\infty$

Soit f une fonction polynôme de degré n tel que : $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ avec $a_n \neq 0$

On a : $f(x) = a_nx^n\left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1\right)$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1\right) = 1$ alors

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_nx^n$

Même chose si x tend vers $-\infty$

Propriété :

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ $(-\infty)$est la limite de son plus grand terme en $+\infty$ $(-\infty)$

4) Limites d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$

Une fonction rationnelle est le rapport de deux fonctions polynômes : $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ où :

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ avec $a_n \neq 0$ et $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ avec $b_m \neq 0$

$h(x) = \frac{a_nx^n\left(\frac{a_0}{a_nx^n}+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+1\right)}{b_mx^m\left(\frac{b_0}{b_mx^m}+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{b_nx}+1\right)}$ et puisque :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{b_nx} + 1\right) = 1$ alors

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$

Même chose si x tend vers $-\infty$

Propriété :

La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ $(-\infty)$est la limite du rapport des termes de plus grand degré en $+\infty$ $(-\infty)$

Exemples :

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7x^3+2x^2+8}{3x^4+2x^2-5x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7x^3}{3x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7}{3x} = 0$

2- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-6x^5+2x^4+8x}{5x^3+2x^2+5x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-6x^5}{5x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-6}{5}x^2 = -\infty$

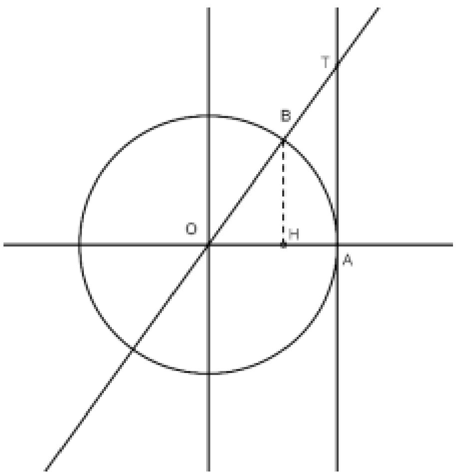
Remarque : La propriété précédente n'est vraie que si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

Exercice : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{x^3+2x\sqrt{x}}$ vous pouvez poser $\sqrt{x} = t$

5) Limites des fonctions trigonométriques.

Activité :

Dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, On considère le cercle trigonométrique d'origine $A(1,0)$. $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$ et B le point sur le cercle trigonométrique tel que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) \equiv x\ \ [2\pi]$.



1-Déterminer en fonction de x la surface du domaine circulaire $\mathcal{D}$ limité par $[OA)$, $[OB)$ et l'arc géométrique $\widehat{AB}$

2- Soit H la projection orthogonale de B sur (OA).

a) Déterminer en fonction de x l'aire du triangle OAB

b) Comparer les aires du domaine $\mathcal{D}$ et du triangle , que peut-on conclure ?

3- Montrer que : $(\forall x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])\ (|sinx| \leq |x|)$.

4- Déterminer les limites $\lim\limits_{x\to 0} sinx$; $\lim\limits_{x\to a} sinx$ et $\lim\limits_{x\to a} cosx$

5- Considérons la droite (Δ) la droite tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A

a) Soit T l'intersection de (Δ) et (OB), Déterminer en fonction de x la surface de OAT

b) En déduire que $\left(\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)\ (x \leq tanx)$

c) En déduire que $\left(\forall x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)\ (|x| \leq |tanx|)$

6- En utilisant les résultats précédents. Montrer que :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tanx}{x} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$

Propriété :

Soit a un réel on a :

- $\lim\limits_{x\to a} sinx = sina$
- $\lim\limits_{x\to a} cosx = cosa$
- si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\lim\limits_{x\to a} tanx = tana$

Propriété :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$
b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tanx}{x} = 1$
c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$

Exercices :

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin7x}{tan3x}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{sin2x}{cosx}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2cos^2x+cosx-3}{1-cos^2x}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tanx+tan2x}{tan3x+tan4x}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-tanx}{cosx-sinx}$

VI) COMPLEMENT

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a, on dit que f est **continue** en a si elle admet une limite finie en a **qui est égale à $f(a)$.**

f **continue** en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exemples :

1. Toute fonction polynôme est continue en a pour tout a dans $\mathbb{R}$, si P est une fonction polynôme alors $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$.

2. Toute fonction rationnelle est continue en a si $a \in D_f$. si h est une fonction rationnelle et $a \in D_h$ alors $\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$.
3. Les fonctions sin et cos sont continues en a pour tout a dans $\mathbb{R}$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ $(r > 0)$ on dit que f est continue à droite de a si : $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$